Relaciones y funciones

1. Relaciones. Como concepto fundamental, la palabra relación significa una conexión o correspondencia de un determinado ente con otro.

Asi por ejemplo, las expresiones “esposo de”, “hermana de”, designan relaciones entre miembros de una familia (seres vivos), las expresiones “menor que”, “mayor que” denotan telaciones entre números (seres abstractos). Expresiones como estas y muchas más llevan a entender que relación es un conjunto de parejas que satisfacen una propiedad.

1.1 Par ordenado. Intuitivamante un par ordenado es un conjunto de dos elementos en el cual cada elemento tiene un lugar fijo. Si los elementos son a y b, el par ordenado se simboliza por:

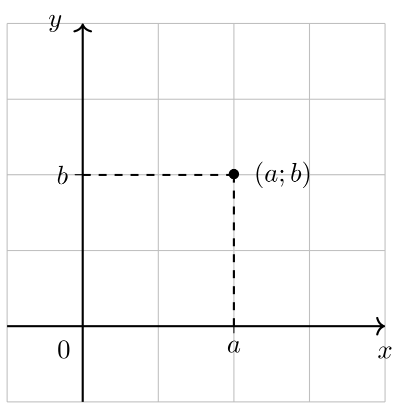
$$(a;b)$$

donde a es el primer elemento, componente o coordenada del par ordenado y b es el segundo elemento, componente o coordenada del par ordenado.

Dos pares ordenados (a,b) y (c,d) son iguales si y solo si los primeros componentes son iguales $a=c$, asi como sus segundas componentes $b=d$, simultaneamente, es decir:

$$(a,b)=(c,d)\rightarrow\left\{\begin{array}{ccc} a & = & c \\ b & = & d \end{array}\right.$$

1.2. Representación gráfica. El par ordenado $(a;b)$ en el plano cartesiano representa un punto cuya abcisa es a y ordenada b, es decir:



Ejemplos: Determinar los valores de x y y, de modo que cumpla la igualdad:

i) $(x-7y,2x-6y)=(15,-10)$

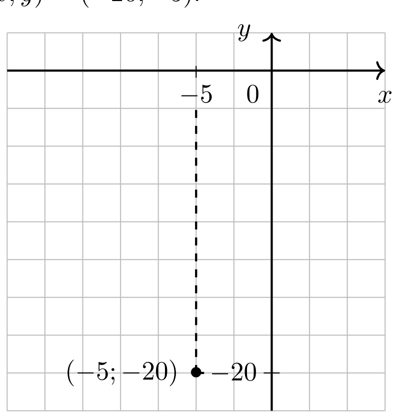
Mediante la igualdad de pares ordenados:

$$(x-7y,2x-6y)=(15,-10)\rightarrow\left\{\begin{array}{ccc} x-7y & = & 15 \\ 2x-6y & = & -10 \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{ccc} x-7y & = & 15 \\ x-3y & = & -5 \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{cccc} x & = & 7y+15 & (1) \\ x & = & 3y-5 & (2) \end{array}\right.$$

igualando (1) y (2): $7y+15=3y-5\rightarrow 7y-3y=-5-15\rightarrow 4y=-20\rightarrow y=\dfrac{-20}{4}\rightarrow y=-5$

renplazando $y=-5$ en (1): $x=7(-5)+15\rightarrow x=-35+15\rightarrow x=-20$

la solución es el par ordenado: $(x,y)=(-20,-5)$.



ii) $(3x-8y;4x+3y)=(4-2x-10y;2x+4y+7)$

Solución:

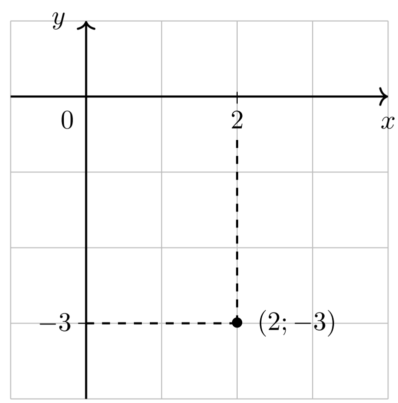
Por igualdad de pares ordenados:

$$(3x-8y;4x+3y)=(4-2x-10y;2x+4y+7)\rightarrow\left\{\begin{array}{rcl}3x-8y&=&4-2x-10y\\4x+3y&=&2x+4y+7\end{array}\right.=\left\{\begin{array}{rcl}3x+2x-8y+10y&=&4\\4x-2x+3y-4y&=&7\end{array}\right.$$

$$=\left\{\begin{array}{rcll}5x+2y&=&4&(1)\\2x-y&=&7&(2)\end{array}\right.$$

de (2) despejamos y: $\rightarrow y=2x-7$; reemplazamos $y=2x-7$ en (1): $5x+2(2x-7)=4\rightarrow 5x+4x-14=4$ $\rightarrow 9x=4+14\rightarrow 9x=18\rightarrow x=\dfrac{18}{9}\rightarrow x=2$; reemplazando $x=2$ en $y=2x-7$ tenemos: $y=2(2)-7\rightarrow$ $y=4-7\rightarrow y=-3$

tenemos como solución al par ordenado: $(x;y)=(2;-3)$



iii) $(5x+2y;-4)=(-1;2x-y)$

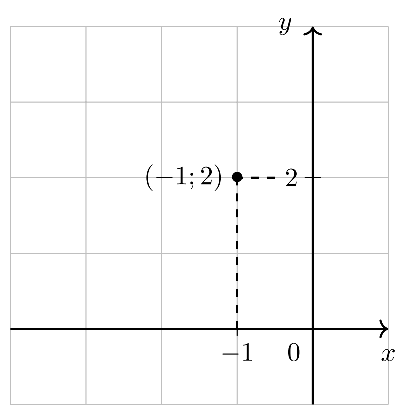
Solución:

Por igualdad de pares ordenados:

$$(5x+2y;-4)=(-1;2x-y)\rightarrow\left\{\begin{array}{rcl}5x+2y&=&-1\\-4&=&2x-y\end{array}\right.=\left\{\begin{array}{rcll}5x+2y&=&-1&(1)\\2x-y&=&-4&(2)\end{array}\right.$$

de (2) despejamos y: $\rightarrow y=2x+4$; reemplazando $y=2x+4$ en (1): $5x+2(2x+4)=-1\rightarrow 5x+4x+8=-1$ $\rightarrow 9x=-1-8\rightarrow 9x=-9\rightarrow x=\dfrac{-9}{9}\rightarrow x=-1$; reemplazando $x=-1$ en $y=2x+4$ tenemos: $y=2(-1)+4\rightarrow y=-2+4\rightarrow y=2$

tenmos como solución al par ordenado: $(x;y)=(-1;2)$



iv) $(x^3-19;x^2y-6)=(y^3;xy^2)$

Solución:

Por igualdad de pares ordenados:

$(x^3-19;x^2y-6)=(y^3;xy^2) \rightarrow \begin{cases} x^3-19 &= y^3 \\ x^2y-6 &= xy^2 \end{cases} = \begin{cases} x^3-y^3 &= 19 \quad (1) \\ x^2y-xy^2 &= 6 \quad (2) \end{cases}$

dividiendo: $\dfrac{(1)}{(2)}$: $\dfrac{x^3-y^3}{x^2y-xy^2}=\dfrac{19}{6} \rightarrow \dfrac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{xy(x-y)}=\dfrac{19}{6} \rightarrow \dfrac{\cancel{(x-y)}(x^2+xy+y^2)}{xy\cancel{(x-y)}}=\dfrac{19}{6}$

$\rightarrow \dfrac{x^2+xy+y^2}{xy}=\dfrac{19}{6} \rightarrow 6(x^2+xy+y^2)=19xy \rightarrow 6x^2+6xy+6y^2=19xy \rightarrow 6x^2+6xy-19xy+6y^2=0$

$\rightarrow 6x^2-13xy+6y^2=0 \rightarrow (3x-2y)(2x-3y)=0 \rightarrow 3x-2y=0 \wedge 2x-3x=0$

$$\begin{cases} 3x-2y &= 0 \quad (\alpha) \\ x^2y-xy^2 &= 6 \quad (\beta) \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-3y &= 0 \quad (\mathrm{I}) \\ x^2y-xy^2 &= 6 \quad (\mathrm{II}) \end{cases}$$

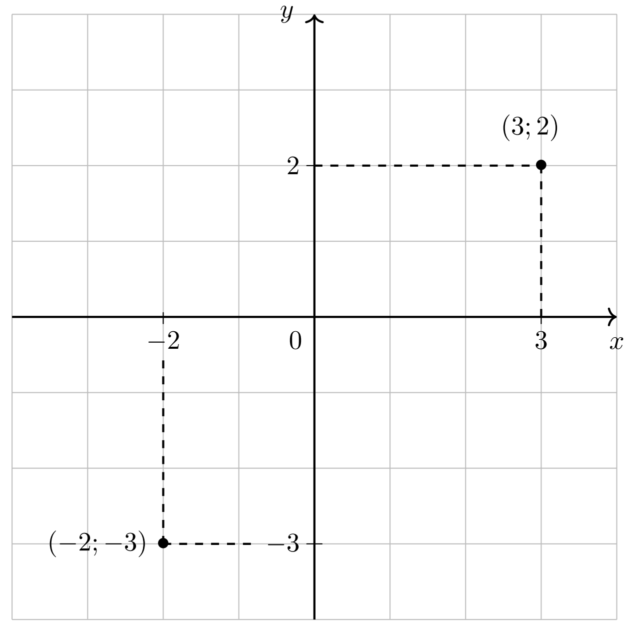
de (α) despejamos y: $y=\dfrac{3x}{2}$; reemplazando en (β): $x^2\left(\dfrac{3x}{2}\right)-x\left(\dfrac{3x}{2}\right)^2=6 \rightarrow \dfrac{3x^3}{2}-\dfrac{9x^3}{4}=6$

$\rightarrow \dfrac{6x^3-9x^3}{4}=6 \rightarrow \dfrac{-3x^3}{4}=6 \rightarrow -3x^3=24 \rightarrow x^3=\dfrac{24}{-3} \rightarrow x^3=-8 \rightarrow x=-2$; reemplazando $x=-2$ en

$y=\dfrac{3x}{2}$ tenemos: $y=\dfrac{3(-2)}{2} \rightarrow y=\dfrac{-6}{2} \rightarrow y=-3$

la solución es el par ordenado: $(x;y)=(-2;-3)$

resloviendo el sistema de ecuaciones (I) y (II) obtenemos: $(x;y)=(3;2)$ (*compruebelo*)



1.3. Producto cartesiano. Dados dos conjuntos A y B, se llama producto cartesiano de A por B, en ese orden, al conjunto formado por todos los pares ordenados (a,b) tales que $a \in A$ y $b \in B$. Se denota por $A \times B$ y simbólicamente se representa:

$$A \times B = \{(a,b)/a \in A \wedge b \in B\}$$

i) Siendo A y B dos conjuntos diferentes: $A \times B \neq B \times A$

ii) Siendo A y B dos conjuntos finitos, el número de elementos de $A \times B$ es igual al número de elementos del conjunto A es $n(A)$ por el número de elementos del conjunto B es $n(B)$, es decir:

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B)$$

iii) Si $A=B$, el producto cartesiano $A \times A$ se denota por: A^2

1.4. Representación geométrica del producto cartesiano. Cada uno de los conjuntos A y B del conjunto producto $A \times B$, puede representarse linealmente sobre dos rectas perpendiculares, las cuales nos permite establecer un sistema de coordenadas en el plano. Los elementos del conjunto A se representan sobre el eje horizontal (eje de abscisas) y los elementos del conjunto B sobre el eje vertical (eje de ordenadas), se trazan líneas verticales que pasan por los elementos del conjunto A y líneas horizontales que pasan por los elementos del conjunto B, al intersectarse, determinan partes ordenados de $A \times B$, que representan los puntos

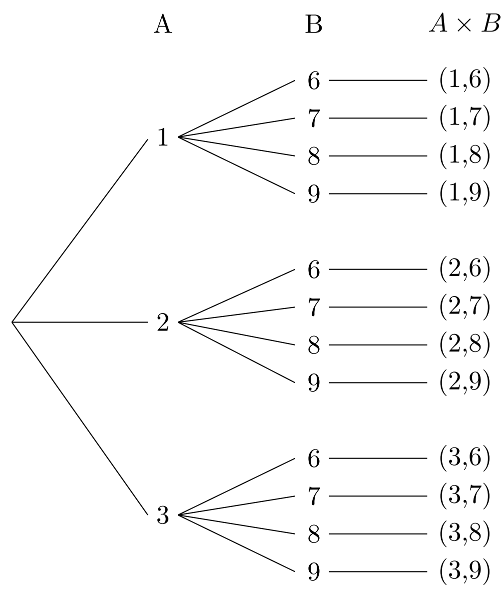
P del plano. En este caso se dice que el punto P tiene como coordenadas x e y, o que $x \in A$ es la abscisa de P y que $y \in B$ es la ordenada del punto P.

v) Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{6, 7, 8, 9\}$. Hallar $A \times B$.

Solución:

$$A \times B = \{(1,6)(1,7)(1,8)(1,9)(2,6)(2,7)(2,8)(2,9)(3,6)(3,7)(3,8)(3,9)\}$$

B A	6	7	8	9
1	(1;6)	(1;7)	(1;8)	(1;9)
2	(2;6)	(2;7)	(2;8)	(2;9)
3	(3;6)	(3;7)	(3;8)	(3;9)



1.5. Relaciones binarias. Se llama relación binaria entre los elementos de un conjunto A y los elementos de un conjunto B a todo subconjunto $\Re$ del producto cartesiano $A \times B$, esto es , una relación binaria $\Re$ consiste en los siguiente:

i) Un conjunto A (conjunto de partida).

ii) Un conjunto B (conjunto de llegada).

iii) Un enunciado abierto $p(x, y)$ tal que $p(a, b)$ es verdadero o falso para todo par ordenado.

Formalmente:

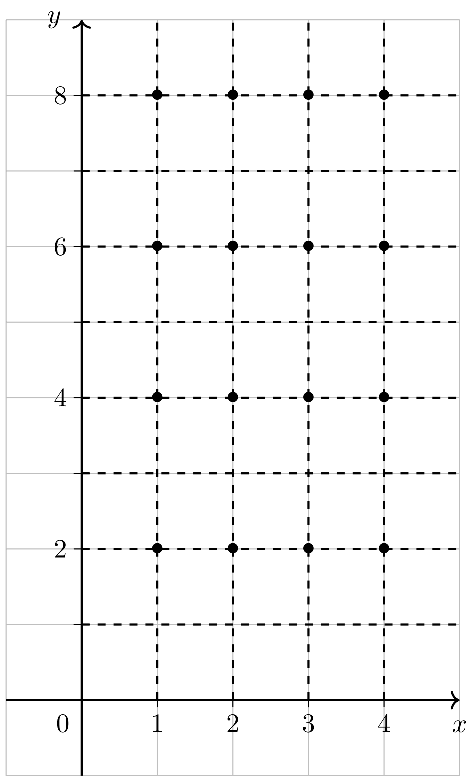
$$\Re = \{(x, y) \in A \times B / p(x, y)\}$$
$$\Re \subset A \times B$$

Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8\}$, determine los pares ordenados de la relación $R = \{(x; y) \in A \times B / x = y - 1\}$ definidas en $A \times B$.

Solución:

A \ B	2	4	6	8
1	(1;2)	(1;4)	(1;6)	(1;8)
2	(2;2)	(2;4)	(2;6)	(2;8)
3	(3;2)	(3;4)	(3;6)	(3;8)
4	(4;2)	(4;4)	(4;6)	(3;8)

$A \times B$



$$R = \{(x;y) \in A \times B / x = y - 1\}$$

relacionando cada par ordenado $(x;y) \in A \times B$; reemplazando en $x = y - 1$:

$$\begin{array}{lllll}
(1;2): & x=y-1: & 1=2-1: & 1=1 & (1,2)\in R\\
(1;4): & x=y-1: & 1=4-1: & 1\neq 3 & (1,4)\notin R\\
(1;6): & x=y-1: & 1=6-1: & 1\neq 5 & (1,6)\notin R\\
(1;8): & x=y-1: & 1=8-1: & 1\neq 7 & (1,8)\notin R\\
(2;2): & x=y-1: & 2=2-1: & 2\neq 1 & (2;2)\notin R\\
(2;4): & x=y-1: & 2=4-1: & 2\neq 3 & (2;4)\notin R\\
(2;6): & x=y-1: & 2=6-1: & 2\neq 5 & (2;6)\notin R\\
(2;8): & x=y-1: & 2=8-1: & 2\neq 7 & (2;8)\notin R\\
(3;2): & x=y-1: & 3=2-1: & 3\neq 1 & (3;2)\notin R\\
(3;4): & x=y-1: & 3=4-1: & 3=3 & (3;4)\in R\\
(3;6): & x=y-1: & 3=6-1: & 3\neq 5 & (3;6)\notin R\\
(3;8): & x=y-1: & 3=8-1: & 3\neq 7 & (3;8)\notin R\\
(4;2): & x=y-1: & 4=2-1: & 4\neq 1 & (4;2)\notin R\\
(4;4): & x=y-1: & 4=4-1: & 4\neq 3 & (4;4)\notin R\\
(4;6): & x=y-1: & 4=6-1: & 4\neq 5 & (4;6)\notin R\\
(4;8): & x=y-1: & 4=8-1: & 4\neq 7 & (4;8)\notin R
\end{array}$$

entonces:

$$R = \{(1;2), (3;4)\}$$