Desigualdades

Nociones de desigualdad. Se conoce con el nombre de desigualdad a toda proposición donde aparece la relación " $<$ " (es menor que) o cualquiera de las relaciónes: " $>$ " (es mayor que), " $\leqslant$ " (es menor o igual que) y " $\geqslant$ " (es mayor o igual que) definidos de la manera siguiente para a, b y $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{lllll}
(1) & \text{Si} & a > 0 & \Longrightarrow & a \text{ es positivo} \\
(2) & \text{Si} & a < 0 & \Longrightarrow & a \text{ es negativo} \\
(3) & \text{Si} & a > b & \Longrightarrow & a - b \text{ es positivo} \\
(4) & \text{Si} & a < b & \Longrightarrow & a - b \text{ es negativo} \\
(5) & \text{Si} & a \leqslant b & \Longrightarrow & a < b \,\vee\, a = b \\
(6) & \text{Si} & a \geqslant b & \Longrightarrow & a > b \,\vee\, a = b \\
(7) & \text{Si} & a < x < b & \Longrightarrow & (a < b) \,\wedge\, (b < c) \\
(8) & \text{Si} & a < x \leqslant b & \Longrightarrow & [a < b \,\wedge\, (a < c \,\vee b = c)]
\end{array}$$

En particular las relaciones $a < b$ y $a > b$ se llaman desigualdades estrictas, mientras que $a \leqslant b$ y $a \geqslant b$ se llaman desigualdades no estrictas.

Inecuaciones. Una incuación es toda desigualdad condicionada que contiene una o más cantidades desconocidas $(x, y, z, ...)$ llamados variables (incognitas), y que solo es verdadera para determinados valores de dichas variables. Las inecuaciónes de una varible son proposiciones que tienen la forma:

$$p(x) < 0,\ p(x) > 0,\ p(x) \leqslant 0,\ p(x) \geqslant 0$$

por la solución de una inecuación entendemos al conjunto de todos los números, cada uno de los cuales, el reemplazar la variable , hace verdadera la desigualdad.

Inecuaciones lineales. Una inecuación lineal o de primer grado, en una variable x, es una desigualdad de la forma:

$$ax + b > 0 \text{ y } ax + b < 0$$

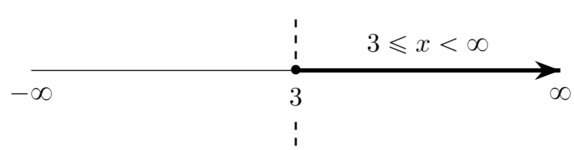
Lan técnica para resolver una inecuación lineal es muy censilla y análoga a la solución de una ecuación lineal con una incógnita.

Hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

1. $3(x-5) - 4(4-3x) \geqslant 2(7-x) - 3(x-5)$

Solución:

$$3(x-5) - 4(4-3x) \geqslant 2(7-x) - 3(x-5)$$
$$3x - 15 - 16 + 12x \geqslant 14 - 2x - 3x + 15$$
$$15x - 31 \geqslant 29\text{-}5\text{x}$$
$$15x + 5x \geqslant 29 + 31$$
$$20x \geqslant 60$$
$$x \geqslant \frac{60}{20}$$
$$x \geqslant 3$$



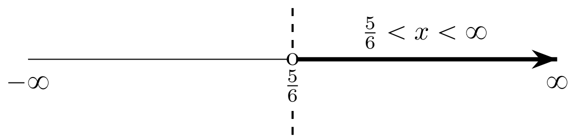
$$x \in (3 \leqslant x < \infty)$$

2. $\dfrac{4x-1}{4} < \dfrac{2x-3}{2} - \dfrac{5-x}{3} + \dfrac{x+15}{6}$

Solución:

$$\frac{4x-1}{4} < \frac{2x-3}{2} - \frac{5-x}{3} + \frac{x+15}{6}$$
$$\frac{4x-1}{4} + \frac{5-x}{3} < \frac{2x-3}{2} + \frac{x+15}{6}$$
$$\frac{3(4x-1) + 4(5-x)}{12} < \frac{6(2x-3) + 2(x+15)}{12}$$
$$\frac{12x - 3 + 20 - 4x}{\cancel{12}} < \frac{12x - 18 + 2x + 30}{\cancel{12}}$$

$$
\begin{aligned}
17-4x &< 2x+12\\
-4x-2x &< 12-17\\
-6x &< -5\\
\text{multiplicando por } -1 \qquad 6x &> 5\\
x &> \frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

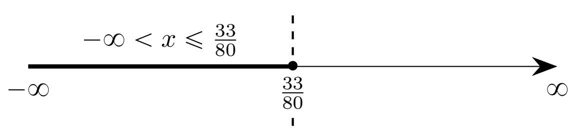


$$x \in \left(\frac{5}{6} < x < \infty\right)$$

3. $\frac{3}{4}\left(2x-\frac{1}{5}\right)+3x \leqslant (3-x)\frac{1}{2}$

Solución:

$$
\begin{gathered}
\frac{3}{4}\left(2x-\frac{1}{5}\right)+3x \leqslant (3-x)\frac{1}{2}\\
\frac{3}{4}\left(\frac{10x-1}{5}\right)+3x \leqslant \frac{3-x}{2}\\
\frac{3(10x-1)}{20}+3x \leqslant \frac{3-x}{2}\\
\frac{3(10x-1)+60x}{20} \leqslant \frac{3-x}{2}\\
\frac{30x-3+60x}{\cancel{20}} \leqslant \frac{3-x}{\cancel{2}}\\
\frac{90x-3}{10} \leqslant \frac{3-x}{1}\\
90x-3 \leqslant 10(3+x)\\
90x-3 \leqslant 30+10x\\
90x-10x \leqslant 30+3\\
80x \leqslant 33\\
x \leqslant \frac{33}{80}
\end{gathered}
$$



$$x \in \left(-\infty < x \leqslant \frac{33}{80}\right)$$

Inecuaciones cuadraticas. Una inecuación cuadrática es una igualdad condicional, que reducida a su más simple expresión, tiene la forma:

$$ax^2+bx+c>0 \text{ o } ax^2+bx+c<0$$

donde a, b, c son números reales y $a \neq 0$

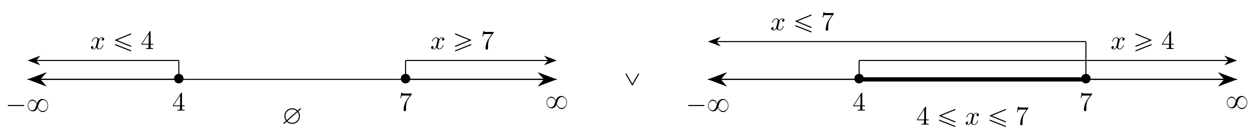
Para determinar los valores de x que satisfacen las inecuaciones, se resuelven por el método de factorización, se utiliza cuando el trinomio ax^2+bx+c es factorizable y su resolución se basa en la aplicación de la regla de los signos para la multiplicación y división.

$$
\begin{aligned}
i)\ a\cdot b>0 &\longleftrightarrow [(a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0)]\\
ii)\ a\cdot b<0 &\longleftrightarrow [(a>0 \wedge b<0) \vee (a<0 \wedge b>0)]
\end{aligned}
$$

4. $x^2-11x+28 \leqslant 0$

Solución;

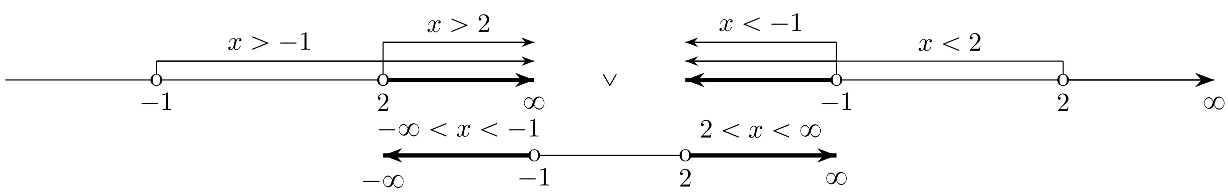
$$x^2 - 11x + 28 \leqslant 0$$
$$(x-7)(x-4) \leqslant 0$$
$$(x-7 \geqslant 0 \ \wedge \ x-4 \leqslant 0) \vee (x-7 \leqslant 0 \ \wedge \ x-4 \geqslant 0)$$
$$(x \geqslant 7 \ \wedge \ x \leqslant 4) \vee (x \leqslant 7 \ \vee \ x \geqslant 4)$$



$$x \in (4 \leqslant x \leqslant 7)$$

5. $x(3x+2) > (x+2)^2$
Solución;

$$x(3x+2) > (x+2)^2$$
$$3x^2 + 2x > x^2 + 4x + 4 > (x+2)^2$$
$$3x^2 - x^2 + 2x - 4x - 4 > 0$$
$$2x^2 - 2x - 4 > 0$$
$$x^2 - x - 2 > 0$$
$$(x-2)(x+1) > 0$$
$$(x-2 > 0 \ \vee \ x+1 > 0) \wedge (x-2 < 0 \ \vee \ x+1 < 0)$$
$$(x > 2 \ \vee \ x > -1) \wedge (x < 2 \ \vee \ x < -1)$$



$$x \in \big[(-\infty < x < -1) \cup (2 < x < \infty)\big]$$

Inecuaciones racionales. Una inecuación racional es una desigualdad condicional que reducida a su más simple expresión tiene la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \text{ o } \frac{P(x)}{Q(x)} < 0$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son monomios, binomios o polinomios no nulos con coeficientes reales.

Primer caso. Las ecuacines racionales tienen la forma:

$$\frac{ax+b}{cx+d} > 0 \text{ y } \frac{ax+b}{cx+d} < 0$$

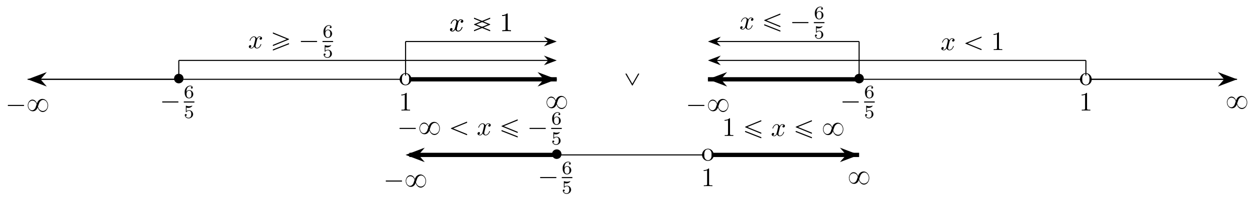
de modo que puede aplicarse la regla de los signos para la multiplicación para su solución.

$$iii) \ \frac{a}{b} > 0 \ \longleftrightarrow \ [(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)]$$
$$iv) \ \frac{a}{b} < 0 \ \longleftrightarrow \ [(a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)]$$

6. $\dfrac{3x+8}{x-1} \geqslant -2$
Solución;

$$\frac{3x+8}{x-1} \geqslant -2$$
$$\frac{3x+8}{x-1} + 2 \geqslant 0$$
$$\frac{3x+8+2(x-1)}{x-1} \geqslant 0$$

$$\frac{3x+8+2x-2}{x-1} \geqslant 0$$
$$\frac{5x+6}{x-1} \geqslant 0$$
$$(5x+6 \geqslant 0 \ \wedge \ x-1>0) \vee (5x+6 \leqslant 0 \ \wedge \ x-1<0)$$
$$\left(x \geqslant -\frac{6}{5} \ \wedge \ x>1\right) \vee \left(x \leqslant -\frac{6}{5} \ \wedge \ x<1\right)$$

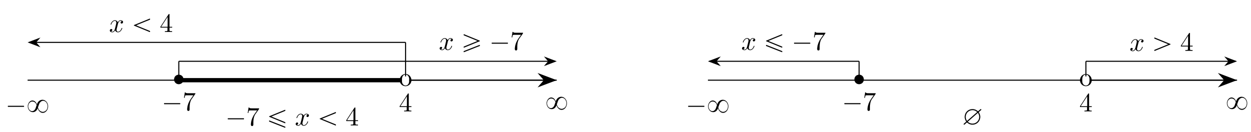


$$x \in \left(\left(-\infty < x \leqslant -\frac{6}{5}\right) \cup (1 \leqslant x < \infty)\right)$$

7. $\dfrac{2x+3}{x-4} \leqslant 1$

Solución;

$$\frac{2x+3}{x-4} \leqslant 1$$
$$\frac{2x+3}{x-4} - 1 \leqslant 0$$
$$\frac{2x+3-(x-4)}{x-4} \leqslant 0$$
$$\frac{2x+3-x+4}{x-4} \leqslant 0$$
$$\frac{x+7}{x-4} \leqslant 0$$
$$(x+7 \geqslant 0 \ \wedge \ x-4<0) \vee (x+7 \leqslant 0 \ \wedge x-4>0)$$
$$(x \geqslant -7 \ \wedge \ x<4) \vee (x \leqslant -7 \ \wedge x>4)$$



$$x \in (-7 \leqslant x < 4)$$

Segundo caso. Cuando la inecuación tiene la forma:

$$\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f} > 0 \text{ y } \frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f} < 0$$

Si ambos trinomios tienen raices reales y distintos, entonces la inecuación equivalente se transforma en una inecuación polinómica.

Resolución gráfica de inecuaciones en $\mathbb{R}$. Cuando realizamos el estudio de la técnica para resolver inecuaciónes cuadráticas y racionales, estas se pueden resolver en forma sencilla aplicando la regla de los signos (tanto para la multiplicación y división).

$$i) \ a \cdot b > 0 \ \longleftrightarrow \ [(a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0)]$$
$$ii) \ a \cdot b < 0 \ \longleftrightarrow \ [(a>0 \wedge b<0) \vee (a<0 \wedge b>0)]$$
$$iii) \ \frac{a}{b} > 0 \ \longleftrightarrow \ [(a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0)]$$
$$iv) \ \frac{a}{b} < 0 \ \longleftrightarrow \ [(a>0 \wedge b<0) \vee (a<0 \wedge b>0)]$$

Si el producto consiste en tres o más factores lineales, la aplicación de esta regla se muy dificil y complicado por el mayor número de alternaticas que se presentan. Para evitar esta dificultad un método de resolver inecuaciones en $\mathbb{R}$ haciendo uso de la representación gráfica de los números reales en la recta real, consiste en lo siguiente:

1) Dada una inecuación $\mathbb{R}$, se descompone en factores lineales dándole la forma: $ab > 0$ o $ab < 0$.

2) Se resuelve la ecuación $ab = 0 \longleftrightarrow a = 0 \ \wedge \ b = 0$. (Las raíces de esta ecuación se llaman valores o puntos críticos de la inecuación).

3) Se ubican los puntos críticos en la recta real, determinando en ellos los intervalos de variación, luego se estudia el signo de cada factor en dichos intervalos, por el criterio siguiente: Por ejemplo si c es un punto crítico:

A la derecha de c, $\forall\ x \in \mathbb{R}$: $x > c \to (x - c) > 0$, se escribe $(+)$,

A la izquierda de c, $\forall\ x \in \mathbb{R}$: $x < c \to (x - c) < 0$, se escribe $(-)$.

$$\begin{array}{c|c|c}
(-) & & (+) \\
\hline
x < c & c & x > c \\
(x-c) < c & & (x-c) > 0
\end{array}$$

4) se determina el signo de cada intervalo multiplicando verticalmente los signos de cada factor. El resultado se ubica en la recta real.

5) Según sea el sentido de la desigualdad se eligen el o los intervalos que constituiran el conjunto solución.

Si la inecaución es de la forma $P(x) > 0$, el conjunto solución estará dado por la unión de los intervalos donde aparece le signo $(+)$.

Si la inecaución es de la forma $P(x) < 0$, el conjunto solución estará dado por la unión de los intervalos donde aparece le signo $(-)$.

En los ejercicios siguientes resolver la inecuación dada. Representar la solución sobre una recta real y expresar el resultado como un intervalo o unión de intervalos:

8. $x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30 < 0$

Solución:

1)

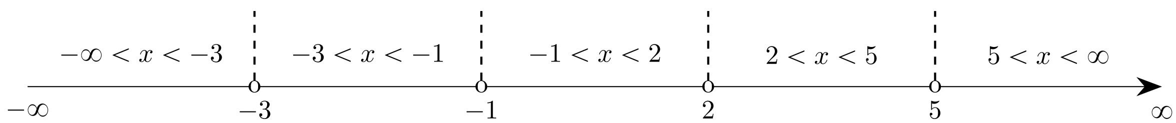
$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -3 & -15 & 19 & 30 \\
-1 & & -1 & 4 & 11 & -30 \\
\hline
 & 1 & -4 & -11 & 30 & 0 \\
2 & & 2 & -4 & -30 & \\
\hline
 & 1 & -2 & -15 & 0 & \\
-3 & & -3 & 15 & & \\
\hline
 & 1 & -5 & 0 & &
\end{array}$$

2)

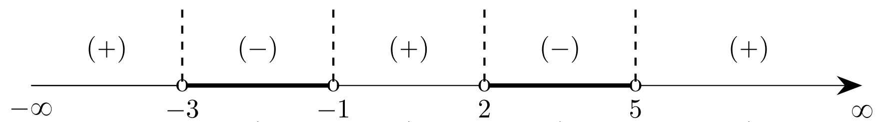
$$x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30 = (x+1)(x-2)(x+3)(x-5)$$
$$x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30 < 0$$
$$(x+1)(x-2)(x+3)(x-5) < 0$$
$$(x+1)(x-2)(x+3)(x-5) = 0$$

$$\begin{array}{cccc}
x+1=0 & x-2=0 & x+3=0 & x-5=0 \\
x=-1 & x=2 & x=-3 & x=5
\end{array}$$

3)



4)



$(x+3)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x+1)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-2)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x-5)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$

5) Dado que $P(x) < 0$, el conjunto solución lo conforman la unión de los intervalos con signo negativo (-), esto es:

$$x \in [(-3 < x < -1) \cup (2 < x < 5)]$$

En el ejercicio siguiente resolver la inecuación dada. Representar la solución sobre una recta real y expresar el resultado como un intervalo o unión de intervalos:

9. $x^4 - 4x^3 - 3x‘2 + 14x - 8 \geqslant 0$

Solución:

1)

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -4 & -3 & 14 & -8 \\
-2 & & -2 & 12 & -18 & 8 \\
\hline
 & 1 & -6 & 9 & -4 & 0 \\
4 & & 4 & -8 & 4 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 1 & 0 & \\
1 & & 1 & -1 & & \\
\hline
 & 1 & -1 & 0 & &
\end{array}$$

2)

$$x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 14x - 8 = (x+2)(x-4)(x-1)(x-1) = (x+2)(x-1)^2(x-4)$$

$$x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 14x - 8 \geqslant 0$$

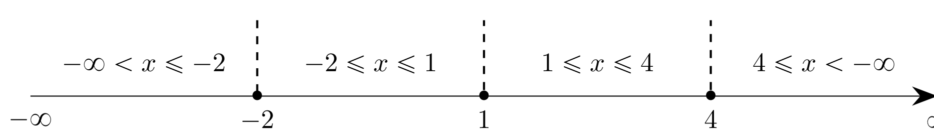
$$(x+2)(x-1)^2(x-4) \geqslant 0$$

$$(x+2)(x-1)^2(x-4) = 0$$

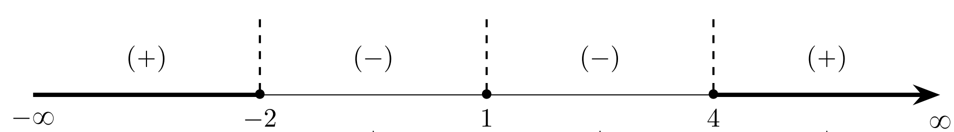
$$x+2=0 \qquad (x-1)^2 = 0 \qquad x-4=0$$

$$x=-2 \qquad x=1 \qquad x=4$$

3)



4)



$(x+2)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-4)$	$-$	$-$	$-$	$+$

5) Dado que $P(x) \geqslant 0$, el conjunto solución lo conforman la unión de los intervalos con signo positivo $(+)$, esto es:

$$x \in [(-\infty < x \leqslant -2) \cup (4 \leqslant x < \infty) \cup \{1\}]$$

Inecuaciones polinómicas. Las inecuaciones polinómicas tienen la forma:

$$P(x): \ a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a^n > 0$$
$$P(x): \ a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a^n < 0$$

y son llamados también inecuaciones de orden superior.

Para un polionomio de grado n , con coeficientes reales:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a^n$$

puede factorizarse de la forma:

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)...(x - r_{n-1})(x - r^n)$$

donde r_n son las raíces reales (valores críticos de la inecuación) de la ecuación $P(x) = 0$ Tal que:

$$r_1 < r_2 < r_3 < ... < r_{n-1} < r_n$$

Si uno de los factores de $P(x)$ es $(x - r)$, entonces se dice que r es un cero o raíz de $P(x)$ o que un valor crítico es un cero o raíz. Existen tres casos para resolver inecuaciones polinómicas:

Caso I. La raíces o ceros del polinomio $P(x)$ son reales y diferentes, es decir:

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)...(x - r_{n-1})(x - r_n)$$

donde

$$r_1 < r_2 < r_3 < ... < r_{n-1} < r_n$$

Los pasos a seguir son los siguientes:

i) Se halla los valores críticos factorizando el polinomio $P(x)$ y resolviendo la ecuación $P(x) = 0$.

ii) Se ubican los valores críticos sobre la recta real y se señalan los intervalos de variación.

iii) Se anota son el signo (+) el último intervalo $\langle r_n, +\infty\rangle$, luego en los demás intervalos se alterna los signos $(-)$, $(+)$, $(-)$, ... de derecha a izquierda.

iv) El conjunto solución lo conforman la unión de los intervalos con signo (+) si $P(x) > 0$, o la unión de interervalos con signo $(-)$ si $P(x) < 0$

Las inecuaciones racionales de la forma $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$ o $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0$ donde $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ son polinomios no nulos de grado $n > 2$ y $m > 2$ también puede ser resulto por el método de los valores críticos, teniendo cuidado de restringir las raices de $Q_m(x) = 0$, es decir $Q_m(x) \neq 0$.

10. $x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30 < 0$

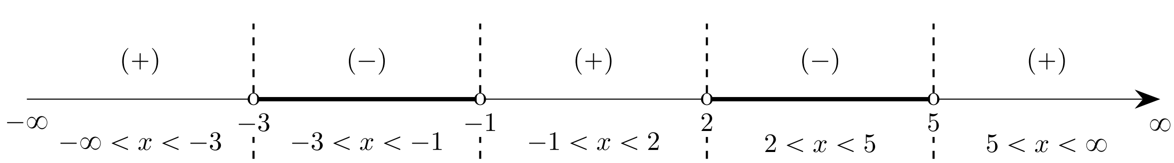
Solución:

	1	-3	-15	19	30
-3		-3	18	-9	-30
	1	-6	3	10	0
-1		-1	7	-10	
	1	-7	10	0	
2		2	-10		
	1	-5	0		

$$x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30 < 0$$
$$(x + 3)(x + 1)(x - 2)(x - 5) < 0$$

$$(x + 3)(x + 1)(x - 2)(x - 5) = 0$$

$$x + 3 = 0 \qquad x + 1 = 0 \qquad x - 2 = 0 \qquad x - 5 = 0$$
$$x = -3 \qquad x = -1 \qquad x = 2 \qquad x = 5$$



$$x \in [(-3 < x < -1) \cup (2 < x < 5)]$$

Caso II. Los factores de $P_n(x)$ son todos lineales y algunos ceros de multiplicidad múltiple. Supongamos que $(x - r_i)$ es el factor que se repite n veces, entonces puede ocurrir lo siguiente:

A) Si n es par, los signos de los intervalos donde figur r_i son iguales, es decir, no son altermados.

entonces se elimina el factor $(x - r_i)$ y se trabaja con demás factores como el Caso I. Esto es, si:

a) $(x - r_i)^n(x - a)(x - b) > 0 \rightarrow (x - a)(x - b) > 0$ (restricción)

b) $(x - r_i)^n(x - a)(x - b) < 0 \rightarrow (x - a)(x - b) < 0$ (restricción)

c) $(x - r_i)^n(x - a)(x - b) \geqslant 0 \rightarrow (x - a)(x - b) \geqslant 0$ o $x = r_i$

d) $(x - r_i)^n(x - a)(x - b) \leqslant 0 \rightarrow (x - a)(x - b) \leqslant 0$ o $x = r_i$

Obsecérvese que en las desigualdades estrictas ($>$ o $<$) se restringe la raíz $x = r$, lo contrario sucede con las desigualdades no estrictas $\geqslant$ o $\leqslant$.

Si m, es un número par, entonces al pasar por el punto x, el polinomio conserva su signo.

Si m, es un número impar, entonces al pasar por el punto x; el polinomio cambia de signo.

11. $(x^3 - 5x^2 + 7x - 3)(2 - x) \geqslant 0$

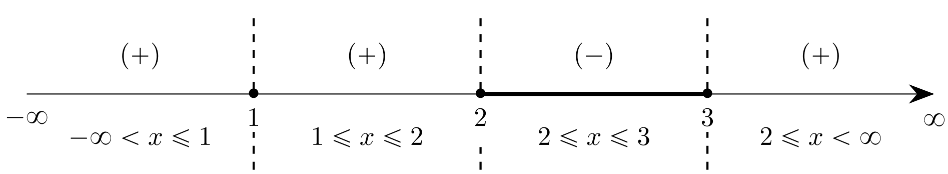
Solución:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -5 & 7 & -3 \\ 3 & & 3 & 6 & 0 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} (x^3 - 5x^2 + 7x - 3)(2 - x) &\geqslant 0 \\ (x - 3)(x^2 - 2x + 1)(-x + 2) &\geqslant 0 \\ -(x - 3)(x - 1)^2(x - 2) &\geqslant 0 \\ (x - 3)(x - 1)^2(x - 2) &\leqslant 0 \end{aligned}$$

$$(x - 3)(x - 1)^2(x - 2) = 0$$

$$\begin{array}{ccc} x - 3 = 0 & (x - 1)^2 = 0 & x - 2 = 0 \\ x = 3 & x = 1 & x = 2 \end{array}$$



$$x \in (2 \leqslant x \leqslant 3)$$

B) Si m es impar, el factor $(x - r_i)^m$ tiene el mismo signo del factor $(x - r_i)$, en consecuencia, la inecuación se resuelve como el Caso I, esto es, si:

a) $(x - r_i)^m(x - a)(x - b) > 0 \rightarrow (x - r_i)(x - a)(x - b) > 0$

b) $(x - r_i)^m(x - a)(x - b) < 0 \rightarrow (x - r_i)(x - a)(x - b) < 0$

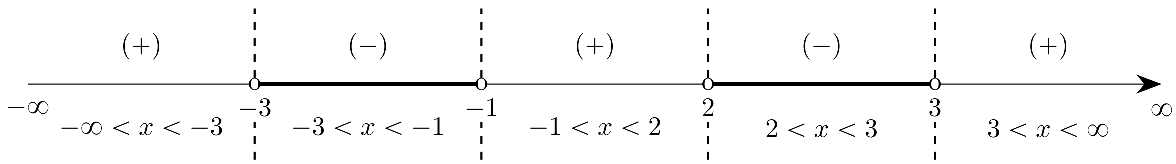
12. $(x^3 + x^2 - 9x - 9)(x - 2)^3 < 0$

Solución:

$$\begin{aligned} (x^3 + x^2 - 9x - 9)(x - 2)^3 &< 0 \\ [x^2(x + 1) - 9(x + 1)](x - 2)^3 &< 0 \\ (x + 1)(x^2 - 9)(x - 2)^3 &< 0 \\ (x + 1)(x - 3)(x + 3)(x - 2)^3 &< 0 \end{aligned}$$

$$(x + 1)(x - 3)(x + 3)(x - 2)^3 = 0$$

$$\begin{array}{cccc} x + 1 = 0 & x - 3 = 0 & x + 3 = 0 & (x - 2)^3 = 0 \\ x = -1 & x = 3 & x = -3 & x = 2 \end{array}$$



$$x \in [(-3 < x < -1) \cup (2 < x < 3)]$$

Caso III. Cuando los factores de $P(x)$ son lineales y cuadráticos, siendo los ceros del factor cuadrático no reales. Si uno de los dos trinomios no tienen soluciones reales o tiene una raiz doble, es decir, si el discriminante $\triangle = b^2 - 4ac < 0$, o si $\triangle = b^2 - 4ac = 0$, es decir:

Si $b^2 - 4ac < 0$
si $a > 0$, entonces $\quad ax^2 + bx + c > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
si $a < 0$, entonces $\quad ax^2 + bx + c < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

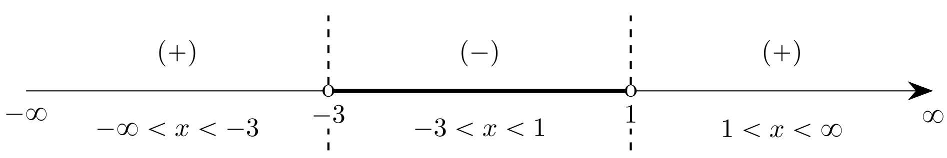
13. $(x^2 + 2x - 3)(3x - 4 - x^2) > 0$

Solución:

$$(x^2 + 2x - 3)(3x - 4 - x^2) > 0$$
$$(x + 3)(x - 1)(-x^2 + 3x - 4) > 0$$
$$-(x + 3)(x - 1)(x^2 - 3x + 4) > 0$$
$$(x + 3)(x - 1)(x^2 - 3x + 4) < 0$$
$$\triangle = (-3)^2 - 4(1)(4) \rightarrow \triangle = 9 - 16 \rightarrow \triangle = -7$$

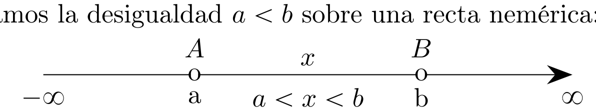
El factor cuadrático $x^2 - 3x + 4$ no tiene raices reales ($\triangle < 0$), por lo que $x^2 - 3x + 4 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, podemos precindir de este factor y analizar los signos de los intervalos de la inecuación equivalente:

$$(x + 3)(x - 1) < 0$$
$$(x + 3)(x - 1) = 0$$
$$x + 3 = 0 \qquad x - 1 = 0$$
$$x = -3 \qquad x = 1$$



$$x \in (-3 < x < 1)$$

Intervalos. Si representamos la desigualdad $a < b$ sobre una recta nemérica:

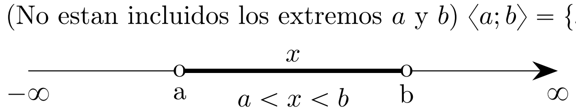


Vemos que el punto A, que representa al número a, esta a la izquierda del punto B que representa al número b. Esto nos da una idea de que existe números reales entre a y b o también que existen números antes de a y depues de b (subconjuntos de $\mathbb{R}$). si ocurre que $a < x$ y $x < b$, esto se puede escribir como una desigualdad continua de la siguiente manera:

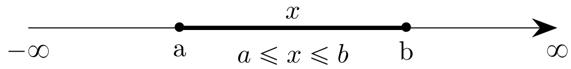
$$a < x < b$$

A estos subconjuntos numéricos en $\mathbb{R}$, que estan definidos mediante la propiedad de sus elementos atisfacenciertas desigualdades, se les denomina intervalos.

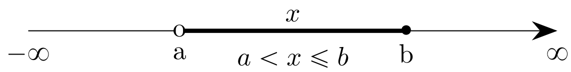
Intervalo abierto. (No estan incluidos los extremos a y b) $\langle a; b \rangle = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$



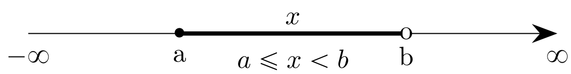
Intervalo cerrado. (Estan incluidos los extremos a y b) $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x \leqslant b\}$



Intervalo semiabierto por la izquierda. $\langle a; b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leqslant b\}$

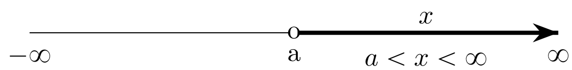


Intervalo semiabierto por la derecha. $[a; b\rangle = \{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x < b\}$

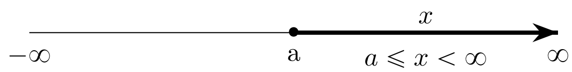


Intervalos infinitos.

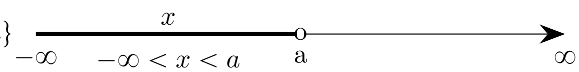
a) $\langle a; \infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} | a < x < \infty\}$



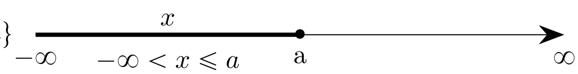
b) $[a; \infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x < \infty\}$



c) $\langle -\infty; a\rangle = \{x \in \mathbb{R} | -\infty < x < a\}$



d) $\langle -\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} | -\infty < x \leqslant a\}$



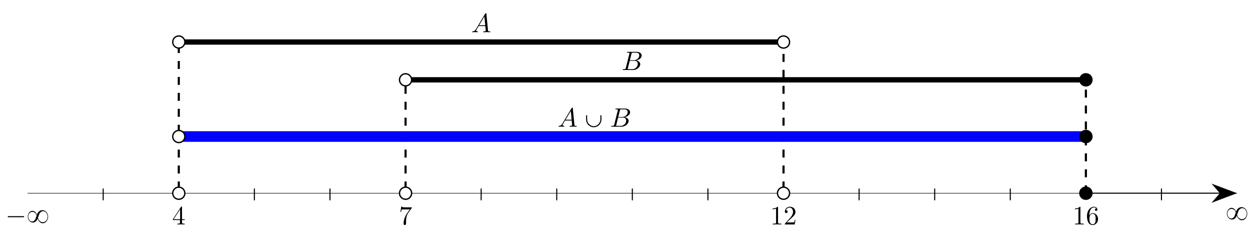
La notación ∞, que se lee infinito, no es un número real, siño un símbolo que se utilisa para indicar que a partir de el número x hay números tan grandes como se quiera, por la derecha $(-\infty)$ o por la izquierda $(-\infty)$.

Operaciones con intervalos. Siendo los intervalos sobsonjuntos de los números reales, es posible relizar con ellos las propiedades operativas de conjuntos, como son la intersección, unión, diferencia y complementación.

1. Sean los intervalos $A = \langle 6; 12\rangle$ y $B = \langle 7, 16]$. Hallar *a*) $A \cup B$, *b*) $A \cap B$ *c*) A^c, y B^c

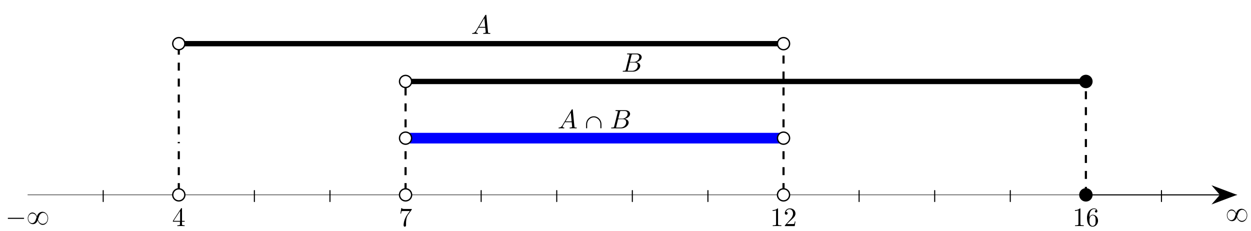
Solución:

a)



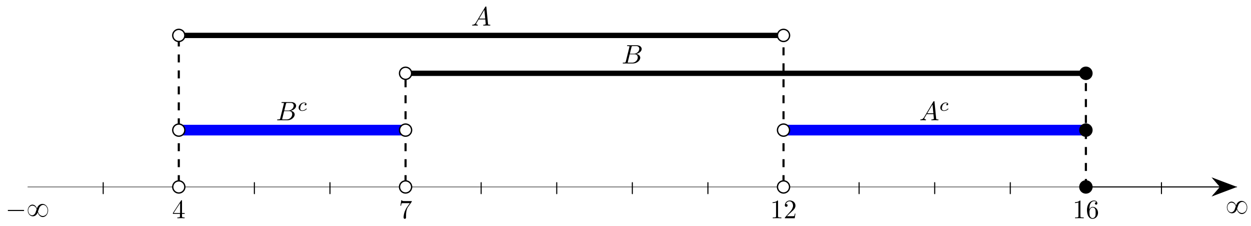
$A \cup B = \langle 4; 16]$ (Conjunto de elementos de A y B)

b)



$A \cap B = \langle 7; 12\rangle$ (Conjunto de elementos comunes de A y B)

c)



$A^c = \langle 12; 16]$ (es el conjunto de elementos que no pertenecen a A)

$B^c = \langle 4; 7\rangle$ (es el conjunto de elementos que no pertenecen a B)

Aplicaciones de las desigualdades a economia.

14. Una compañía que renta vehículos ofrece dos planes para rentar un automóvil.
Plan A: $ 30 por día y 10¢ por milla
Plan B: $ 50 por día y gratis millas recorridas ilimitadas
¿Para qué valor de millas el plan B le hará ahorrar dinero?

Solución:

Se pide el número de millas para que el plan B le hará ahorrar dinero. Entonces:

$$x = \text{número de millas recorridos por dia}$$

La información en el problema se podría organizar como sigue:

En palabras	en lenguaje algebraico
Número de millaass	x
Costo en el plan A	$30 + 0.1x$
Costo en el plan B	50

por condición del problema

$$\text{Costo del plan } B < \text{Costo del plan } A$$
$$50 < 30 + 0.1x$$
$$50 - 30 < \frac{1}{10}x$$
$$20 < \frac{1}{10}x$$
$$10 \cdot 20 < x$$
$$200 < x$$

Por lo tanto, el Plan B ahorra dinero cuando se recorrer más de 200 millas al día.