Relaciones y funciones

1. Relaciones. Como concepto fundamental, la palabra relación significa una conexión o correspondencia de un determinado ente con otro.

Asi por ejemplo, las expresiones “esposo de”, “hermana de”, designan relaciones entre miembros de una familia (seres vivos), las expresiones “menor que”, “mayor que” denotan telaciones entre números (seres abstractos). Expresiones como estas y muchas más llevan a entender que relación es un conjunto de parejas que satisfacen una propiedad.

1.1 Par ordenado. Intuitivamante un par ordenado es un conjunto de dos elementos en el cual cada elemento tiene un lugar fijo. Si los elementos son a y b, el par ordenado se simboliza por:

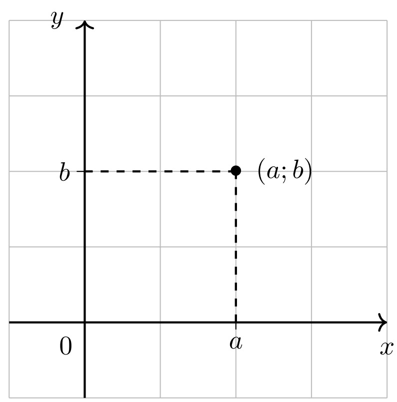
$$(a; b)$$

donde a es el primer elemento, componente o coordenada del par ordenado y b es el segundo elemento, componente o coordenada del par ordenado.

Dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales si y solo si los primeros componentes son iguales $a = c$, asi como sus segundas componentes $b = d$, simultaneamente, es decir:

$$(a, b) = (c, d) \rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & c \\ b & = & d \end{array} \right.$$

1.2. Representación gráfica. El par ordenado $(a; b)$ en el plano cartesiano representa un punto cuya abcisa es a y ordenada b, es decir:



Ejemplos: Determinar los valores de x y y, de modo que cumpla la igualdad:

i) $(x - 7y, 2x - 6y) = (15, -10)$

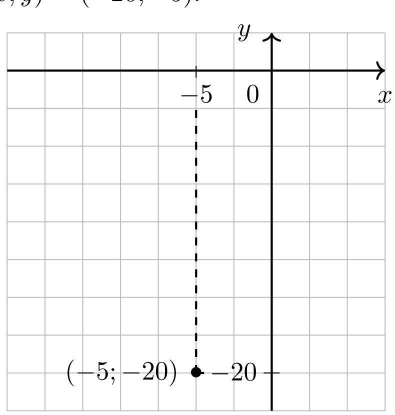
Mediante la igualdad de pares ordenados:

$$(x - 7y, 2x - 6y) = (15, -10) \rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x - 7y & = & 15 \\ 2x - 6y & = & -10 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{rcl} x - 7y & = & 15 \\ x - 3y & = & -5 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{rcll} x & = & 7y + 15 & (1) \\ x & = & 3y - 5 & (2) \end{array} \right.$$

igualando (1) y (2): $7y + 15 = 3y - 5 \rightarrow 7y - 3y = -5 - 15 \rightarrow 4y = -20 \rightarrow y = \dfrac{-20}{4} \rightarrow y = -5$

renplazando $y = -5$ en (1): $x = 7(-5) + 15 \rightarrow x = -35 + 15 \rightarrow x = -20$

la solución es el par ordenado: $(x, y) = (-20, -5)$.



ii) $(3x-8y;4x+3y)=(4-2x-10y;2x+4y+7)$

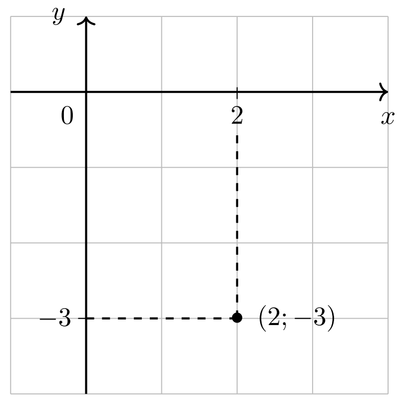
Solución:

Por igualdad de pares ordenados:

$$(3x-8y;4x+3y)=(4-2x-10y;2x+4y+7)\rightarrow\left\{\begin{array}{rcl}3x-8y&=&4-2x-10y\\4x+3y&=&2x+4y+7\end{array}\right.=\left\{\begin{array}{rcl}3x+2x-8y+10y&=&4\\4x-2x+3y-4y&=&7\end{array}\right.$$
$$=\left\{\begin{array}{rcll}5x+2y&=&4&(1)\\2x-y&=&7&(2)\end{array}\right.$$

de (2) despejamos y: $\rightarrow y=2x-7$; reemplazamos $y=2x-7$ en (1): $5x+2(2x-7)=4\rightarrow 5x+4x-14=4$ $\rightarrow 9x=4+14\rightarrow 9x=18\rightarrow x=\dfrac{18}{9}\rightarrow x=2$; reemplazando $x=2$ en $y=2x-7$ tenemos: $y=2(2)-7\rightarrow$ $y=4-7\rightarrow y=-3$

tenemos como solución al par ordenado: $(x;y)=(2;-3)$



iii) $(5x+2y;-4)=(-1;2x-y)$

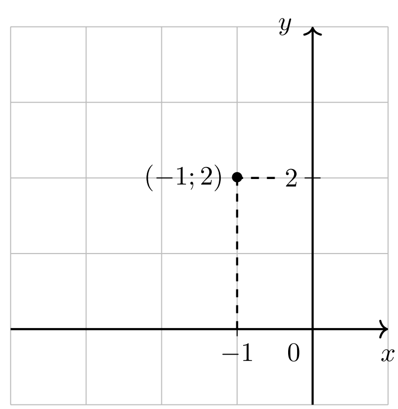
Solución:

Por igualdad de pares ordenados:

$$(5x+2y;-4)=(-1;2x-y)\rightarrow\left\{\begin{array}{rcl}5x+2y&=&-1\\-4&=&2x-y\end{array}\right.=\left\{\begin{array}{rcll}5x+2y&=&-1&(1)\\2x-y&=&-4&(2)\end{array}\right.$$

de (2) despejamos y: $\rightarrow y=2x+4$; reemplazando $y=2x+4$ en (1): $5x+2(2x+4)=-1\rightarrow 5x+4x+8=-1$ $\rightarrow 9x=-1-8\rightarrow 9x=-9\rightarrow x=\dfrac{-9}{9}\rightarrow x=-1$; reemplazando $x=-1$ en $y=2x+4$ tenemos: $y=2(-1)+4\rightarrow y=-2+4\rightarrow y=2$

tenmos como solución al par ordenado: $(x;y)=(-1;2)$



iv) $(x^3-19;x^2y-6)=(y^3;xy^2)$

Solución:

Por igualdad de pares ordenados:

$(x^3-19; x^2y-6) = (y^3; xy^2) \rightarrow \begin{cases} x^3-19 &= y^3 \\ x^2y-6 &= xy^2 \end{cases} = \begin{cases} x^3-y^3 &= 19 \quad (1) \\ x^2y-xy^2 &= 6 \quad (2) \end{cases}$

dividiendo: $\dfrac{(1)}{(2)}$: $\dfrac{x^3-y^3}{x^2y-xy^2} = \dfrac{19}{6} \rightarrow \dfrac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{xy(x-y)} = \dfrac{19}{6} \rightarrow \dfrac{\cancel{(x-y)}(x^2+xy+y^2)}{xy\cancel{(x-y)}} = \dfrac{19}{6}$

$\rightarrow \dfrac{x^2+xy+y^2}{xy} = \dfrac{19}{6} \rightarrow 6(x^2+xy+y^2) = 19xy \rightarrow 6x^2+6xy+6y^2 = 19xy \rightarrow 6x^2+6xy-19xy+6y^2 = 0$

$\rightarrow 6x^2-13xy+6y^2 = 0 \rightarrow (3x-2y)(2x-3y) = 0 \rightarrow 3x-2y = 0 \wedge 2x-3x = 0$

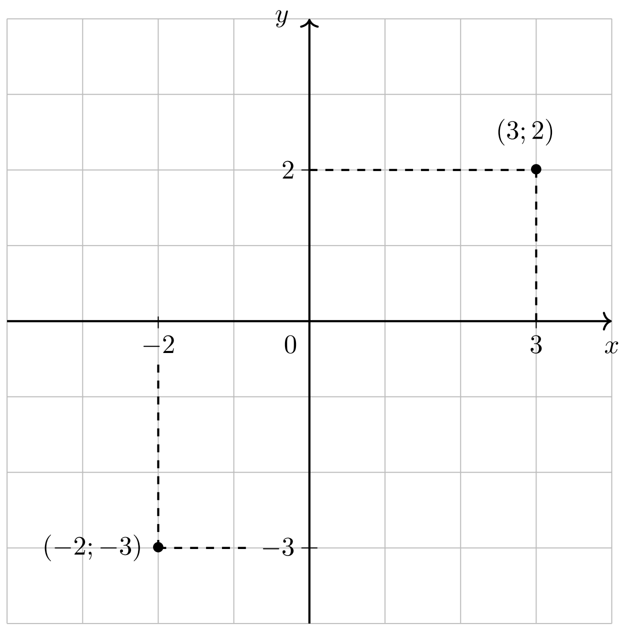
$$\begin{cases} 3x-2y &= 0 \quad (\alpha) \\ x^2y-xy^2 &= 6 \quad (\beta) \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} 2x-3y &= 0 \quad (\mathrm{I}) \\ x^2y-xy^2 &= 6 \quad (\mathrm{II}) \end{cases}$$

de (α) despejamos y: $y = \dfrac{3x}{2}$; reemplazando en (β): $x^2\left(\dfrac{3x}{2}\right) - x\left(\dfrac{3x}{2}\right)^2 = 6 \rightarrow \dfrac{3x^3}{2} - \dfrac{9x^3}{4} = 6$

$\rightarrow \dfrac{6x^3-9x^3}{4} = 6 \rightarrow \dfrac{-3x^3}{4} = 6 \rightarrow -3x^3 = 24 \rightarrow x^3 = \dfrac{24}{-3} \rightarrow x^3 = -8 \rightarrow x = -2$; reemplazando $x = -2$ en $y = \dfrac{3x}{2}$ tenemos: $y = \dfrac{3(-2)}{2} \rightarrow y = \dfrac{-6}{2} \rightarrow y = -3$

la solución es el par ordenado: $(x; y) = (-2; -3)$

resloviendo el sistema de ecuaciones (I) y (II) obtenemos: $(x; y) = (3; 2)$ (*compruebelo*)



1.3. Producto cartesiano. Dados dos conjuntos A y B, se llama producto cartesiano de A por B, en ese orden, al conjunto formado por todos los pares ordenados (a, b) tales que $a \in A$ y $b \in B$. Se denota por $A \times B$ y simbólicamente se representa:

$$A \times B = \{(a, b)/a \in A \wedge b \in B\}$$

i) Siendo A y B dos conjuntos diferentes: $A \times B \neq B \times A$

ii) Siendo A y B dos conjuntos finitos, el número de elementos de $A \times B$ es igual al número de elementos del conjunto A es $n(A)$ por el número de elementos del conjunto B es $n(B)$, es decir:

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B)$$

iii) Si $A = B$, el producto cartesiano $A \times A$ se denota por: A^2

1.4. Representación geométrica del producto cartesiano. Cada uno de los conjuntos A y B del conjunto producto $A \times B$, puede representarse linealmente sobre dos rectas perpendiculares, las cuales nos permite establecer un sistema de coordenadas en el plano. Los elementos del conjunto A se representan sobre el eje horizontal (eje de abscisas) y los elementos del conjunto B sobre el eje vertical (eje de ordenadas), se trazan líneas verticales que pasan por los elementos del conjunto A y líneas horizontales que pasan por los elementos del conjunto B, al intersectarse, determinan partes ordenados de $A \times B$, que representan los puntos

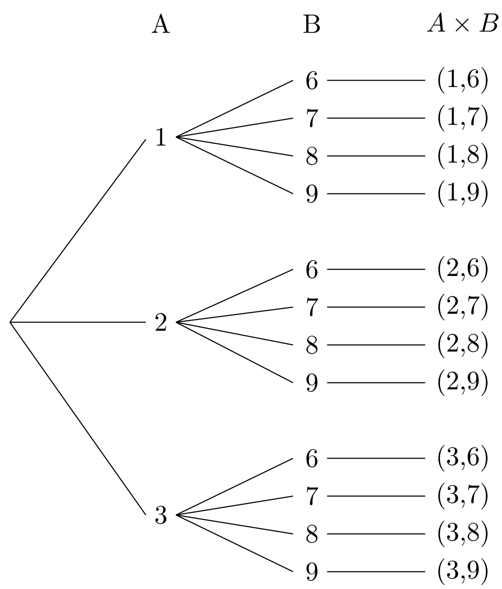
P del plano. En este caso se dice que el punto P tiene como coordenadas x e y, o que $x \in A$ es la abscisa de P y que $y \in B$ es la ordenada del punto P.

v) Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{6, 7, 8, 9\}$. Hallar $A \times B$.

Solución:

$$A \times B = \{(1,6)(1,7)(1,8)(1,9)(2,6)(2,7)(2,8)(2,9)(3,6)(3,7)(3,8)(3,9)\}$$

A \ B	6	7	8	9
1	(1;6)	(1;7)	(1;8)	(1;9)
2	(2;6)	(2;7)	(2;8)	(2;9)
3	(3;6)	(3;7)	(3;8)	(3;9)



1.5. Relaciones binarias. Se llama relación binaria entre los elementos de un conjunto A y los elementos de un conjunto B a todo subconjunto R del producto cartesiano $A \times B$, esto es , una relación binaria R consiste en los siguiente:

i) Un conjunto A (conjunto de partida).

ii) Un conjunto B (conjunto de llegada).

iii) Un enunciado abierto $p(x, y)$ tal que $p(a, b)$ es verdadero o falso para todo par ordenado.

Formalmente:

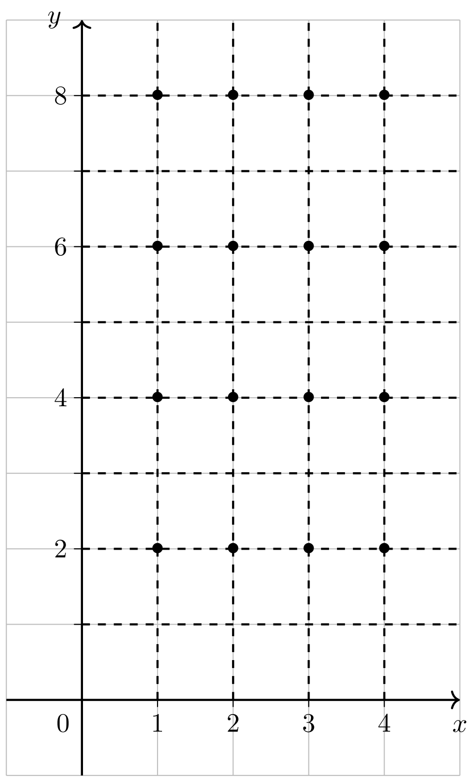
$$R = \{(x, y) \in A \times B / p(x, y)\}$$
$$\Re \subset A \times B$$

Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8\}$, determine los pares ordenados de la relación $R = \{(x; y) \in A \times B / x = y - 1\}$ definidas en $A \times B$.

Solución:

A \ B	2	4	6	8
1	(1;2)	(1;4)	(1;6)	(1;8)
2	(2;2)	(2;4)	(2;6)	(2;8)
3	(3;2)	(3;4)	(3;6)	(3;8)
4	(4;2)	(4;4)	(4;6)	(3;8)

$A \times B$



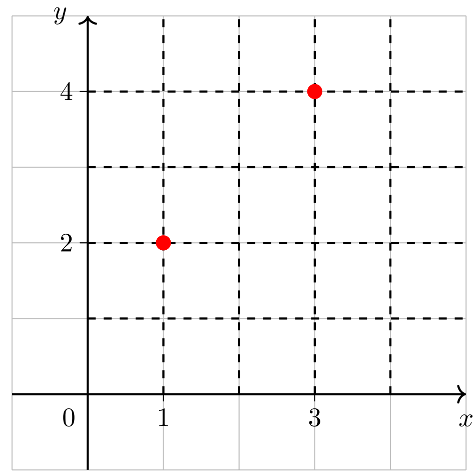
$$R = \{(x; y) \in A \times B / x = y - 1\}$$

relacionando cada par ordenado $(x; y) \in A \times B$; reemplazando en $x = y - 1$:

$$\begin{array}{lllll}
(1;2): & x = y-1: & 1 = 2-1: & 1 = 1 & (1,2) \in R \\
(1;4): & x = y-1: & 1 = 4-1: & 1 \neq 3 & (1,4) \notin R \\
(1;6): & x = y-1: & 1 = 6-1: & 1 \neq 5 & (1,6) \notin R \\
(1;8): & x = y-1: & 1 = 8-1: & 1 \neq 7 & (1,8) \notin R \\
(2;2): & x = y-1: & 2 = 2-1: & 2 \neq 1 & (2;2) \notin R \\
(2;4): & x = y-1: & 2 = 4-1: & 2 \neq 3 & (2;4) \notin R \\
(2;6): & x = y-1: & 2 = 6-1: & 2 \neq 5 & (2;6) \notin R \\
(2;8): & x = y-1: & 2 = 8-1: & 2 \neq 7 & (2;8) \notin R \\
(3;2): & x = y-1: & 3 = 2-1: & 3 \neq 1 & (3;2) \notin R \\
(3;4): & x = y-1: & 3 = 4-1: & 3 = 3 & (3;4) \in R \\
(3;6): & x = y-1: & 3 = 6-1: & 3 \neq 5 & (3;6) \notin R \\
(3;8): & x = y-1: & 3 = 8-1: & 3 \neq 7 & (3;8) \notin R \\
(4;2): & x = y-1: & 4 = 2-1: & 4 \neq 1 & (4;2) \notin R \\
(4;4): & x = y-1: & 4 = 4-1: & 4 \neq 3 & (4;4) \notin R \\
(4;6): & x = y-1: & 4 = 6-1: & 4 \neq 5 & (4;6) \notin R \\
(4;8): & x = y-1: & 4 = 8-1: & 4 \neq 7 & (4;8) \notin R
\end{array}$$

entonces:

$$R = \{(1;2), (3;4)\}$$



2. Funciones. Sean dos conjuntos A y B no vacios y sea f una relación binaria de A en B, esto es, $f \subset A \times B$. Entenderemos por función de A en B toda regla que asocia a cada elemento x del conjunto A con un unico elemento y del conjunto B. Es decir,una función es un conjunto de pares ordenados tal que la primera componente pertenece al conjunto A y el segundo elemento alconjunto B, de modo tal que dos pares ordenados distintos no tengan la misma primera componente.

f es una función de A en $B \iff$ para un $x \in A$, $\exists ! \, y \in B | (x, y) \in B$

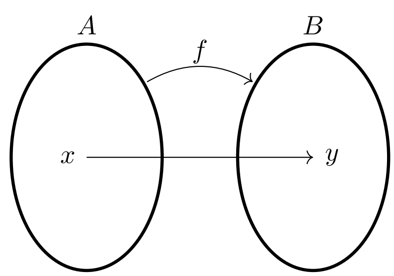
Para denotar que f, se escribe:

$$f : A \to B$$

y se lee "f es una función de A en B"

2.1 Representacion gráfica e una función.

Diagrama sagital o de Ven-Euler (Esquema de flechas).



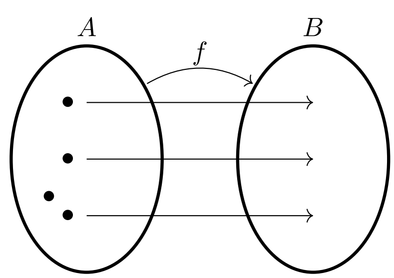
Veamos ahora, con ayuda del diagrama de flechas, qué condiciones debe satisfacer una relación f de A a B para ser una aplicación (o función).

a) Es necesario que cada elemento $x \in A$ participe en al menos un par $(x, y) \in f$, es decir, cada elemento de A debe servir como punto de partida de una flecha.

b) Es necesario que cada elemento $x \in (x; y)$ participe en un solo par $(x; y) \in f$, es decir, cada elemento de A debe servir como punto de partida de una única flecha.

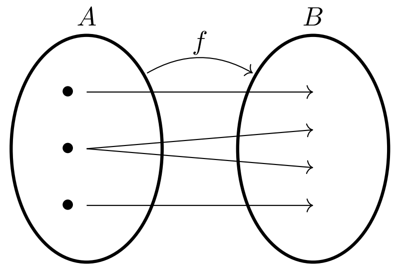
Una relación f no es una aplicación (o función) si no satisface una de las condiciones anteriores, es decir:

a) si hay un elemento de A del que no se origina ninguna flecha.



f no es función

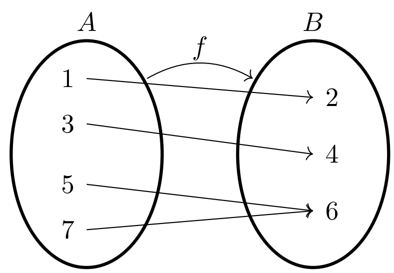
b) si hay un elemento de A del que parten dos o más flechas.



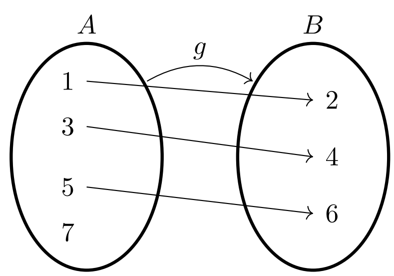
f no es función

Ejemplo 5. Sean $A = \{1, 3, 5, 7\}$ y $b = \{2, 4, 6\}$ Determine que las siguientes relaciones de A en B son o no funciones.
a) $f = \{(1; 2), (3; 4), (5; 6), (7; 6)\}$
b) $g = \{(1; 2), (3; 4), (5; 6)\}$
c) $h = \{(3; 4), (5; 6), (7; 2), (7; 4)\}$
d) $i = \{(1; 4), (3; 4), (5; 4), (7; 4)\}$
e) $j = \{(7; 6), (5; 4), (3; 2), (1; 2)\}$
f) $k = \{(1; 6), (3; 4), (5; 2), (5; 4), (7; 6)\}$
b) $l = \{(3; 2), (3; 4), (3; 6)\}$

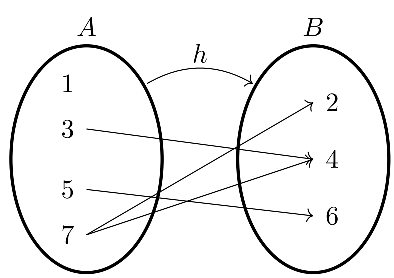
Solución:
Representamos cada relación mediante un diagrama sagital
a) $f = \{(1; 2), (3; 4), (5; 6), (7; 6)\}$



f es una función por que cada elemento de A tiene imagen única en B.
b) $g = \{(1; 2), (3; 4), (5; 6)\}$

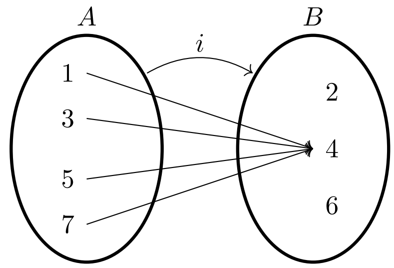


g no es función porque $7 \in A$ no tiene imagen en B
c) $h = \{(3; 4), (5; 6), (7; 2), (7; 4)\}$



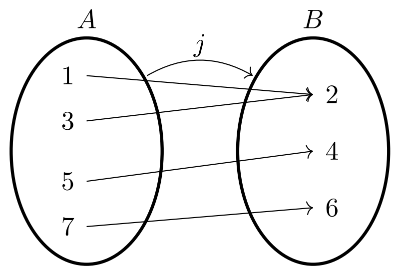
g no es función porque $1 \in A$ no tiene imagen en B, y además que $7 \in A$ tiene más de una imagen en B.

d) $i = \{(1;4),(3;4),(5;4),(7;4)\}$



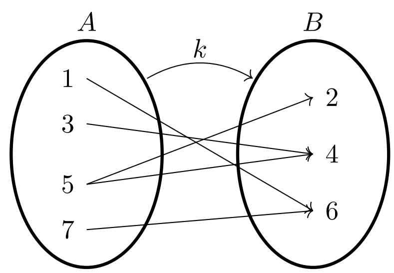
i es una función por que cada elemento de A tiene imagen única en B.

e) $j = \{(7;6),(5;4),(3;2),(1;2)\}$



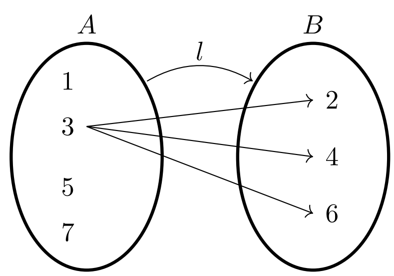
j es una función por que cada elemento de A tiene imagen única en B.

f) $k = \{(1;6),(3;4),(5;2),(5;4),(7;6)\}$



k no es funció, porque $5 \in A$ tiene más de una imagen en B

g) $l = \{(3;2),(3;4),(3;6)\}$



l no es función porque hay elementos de A que no tienen imagen en B, y además que $3 \in A$ tiene más de una imagen en B.

Ejemplo. Dados los conjuntos $A = \{-1,0,1,2,3\}$ y $B = \{-3,-2,-1,0,1,2\}$ y la relación $R = \{(x;y) \in A \times B | y = x - 2\}$

a) Determine los pares ordenados de la relación

b) Construya un diagrama de flechas de la relación,

c) Es una función de A en B?.

Solución:

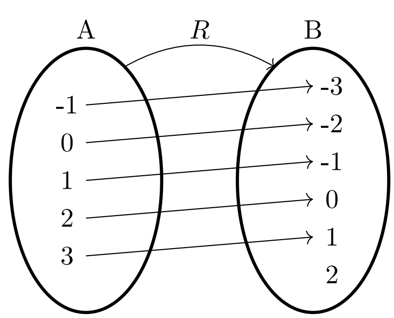
B \ A	-1	0	1	2	3
-3	$(-1;-3)$	$(0,-3)$	$(1;-3)$	$(2;-3)$	$(3;-3)$
-2	$(-1;-2)$	$(0;-2)$	$(1;-2)$	$(2;-2)$	$(3;-2)$
-1	$(-1;-1)$	$(0;-1)$	$(1;-1)$	$(2;-1)$	$(3;-1)$
0	$(-1;0)$	$(0;0)$	$(1;0)$	$(2;0)$	$(3;0)$
1	$(-1;1)$	$(0;1)$	$(1;1)$	$(2;1)$	$(3;1)$
2	$(-1;2)$	$(0;2)$	$(1;2)$	$(2;2)$	$(3;2)$

relacionando cada par ordenado $(x;y) \in A \times B$; reemplazando en $y = x - 2$:

$(-1;-3)$	$y = x - 2$	$-3 = -1 - 2$	$-3 = -3$	$(-1;-3) \in R$
$(0;-3)$	$y = x - 2$	$-3 = 0 - 2$	$-3 \neq -2$	$(0;-3) \notin R$
$(1;-3)$	$y = x - 2$	$-3 = 1 - 2$	$-3 \neq -1$	$(1;-3) \notin R$
$(2;-3)$	$y = x - 2$	$-3 = 20 - 2$	$-3 \neq 0$	$(2;-3) \notin R$
$(3;-3)$	$y = x - 2$	$-3 = 3 - 2$	$-3 \neq -1$	$(3;-3) \notin R$
$(-1;-2)$	$y = x - 2$	$-2 = -1 - 2$	$-2 \neq -3$	$(-1;-2) \notin R$
$(0;-2)$	$y = x - 2$	$-2 = 0 - 2$	$-2 = -2$	$(0;-2) \in R$
$(1;-2)$	$y = x - 2$	$-2 = 1 - 2$	$-2 \neq -1$	$(1;-2) \notin R$
$(2;-2)$	$y = x - 2$	$-2 = 2 - 2$	$-2 \neq 0$	$(2;-2) \notin R$
$(3;-2)$	$y = x - 2$	$-2 = 3 - 2$	$-2 \neq 1$	$(3;-2) \notin R$
$(-1;-1)$	$y = x - 2$	$-1 = -1 - 2$	$-1 \neq -3$	$(-1;-1) \notin R$
$(0;-1)$	$y = x - 2$	$-1 = 0 - 2$	$-1 \neq -2$	$(0;-1) \notin R$
$(1;-1)$	$y = x - 2$	$-1 = 1 - 2$	$-1 = -1$	$(1;-1) \in R$
$(2;-1)$	$y = x - 2$	$-1 = 2 - 2$	$1 \neq 0$	$(2;-1) \notin R$
$(3;-1)$	$y = x - 2$	$-1 = 3 - 2$	$1 \neq 1$	$(3;-1) \notin R$
$(-1;0)$	$y = x - 2$	$0 = -1 - 2$	$0 \neq -3$	$(-1;0) \notin R$
$(0;0)$	$y = x - 2$	$0 = 0 - 2$	$0 \neq -2$	$(0;0) \notin R$
$(1;0)$	$y = x - 2$	$0 = 1 - 2$	$0 \neq -1$	$(1;0) \notin R$
$(2;0)$	$y = x - 2$	$0 = 2 - 2$	$0 = 0$	$(2;0) \in R$
$(3;0)$	$y = x - 2$	$0 = 3 - 2$	$0 \neq 1$	$(3;0) \notin R$
$(-1;1)$	$y = x - 2$	$1 = -1 - 2$	$1 \neq -3$	$(-1;1) \notin R$
$(0;1)$	$y = x - 2$	$1 = 0 - 2$	$1 \neq -2$	$(0;1) \notin R$
$(1;1)$	$y = x - 2$	$1 = 1 - 2$	$1 \neq -1$	$(1;1) \notin R$
$(2;1)$	$y = x - 2$	$1 = 2 - 2$	$1 \neq 0$	$(2;1) \notin R$
$(3;1)$	$y = x - 2$	$1 = 3 - 2$	$1 = 1$	$(3;1) \in R$
$(-1;2)$	$y = x - 2$	$2 = -1 - 2$	$2 \neq -3$	$(-1;2) \notin R$
$(0;2)$	$y = x - 2$	$2 = 0 - 2$	$2 \neq -2$	$(0;2) \notin R$
$(1;2)$	$y = x - 2$	$2 = 1 - 2$	$2 \neq -1$	$(1;2) \notin R$
$(2;2)$	$y = x - 2$	$2 = 2 - 2$	$2 \neq 0$	$(2;2) \notin R$
$(3;2)$	$y = x - 2$	$2 = 3 - 2$	$2 \neq 1$	$(3;2) \notin R$

$a)$ $R = \{(-1;-3),(0;-2),(1;-1),(2;0),(3;1)\}$

$b)$



$c)$ Es una función, para cada elemento de el conjunto A, corresponde un único elemento del conjunto B.

Ejemplo. Dados los conjuntos $A = \{-2,-1,0,1,2,3\}$ y $B = \{0,1,2,3,4\}$ y la relación $R = \{(x;y) \in A \times B | y = x + 2\}$

a) Determine los pares ordenados de la relación

b) Construya un diagrama de flechas de la relación,

c) Es una función de A en B?.

Solución:

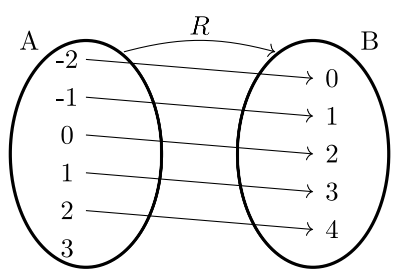
B \ A	-2	-1	0	1	2	3
0	$(-2;0)$	$(-1;0)$	$(0;0)$	$(1;0)$	$(2;0)$	$(3;0)$
1	$(-2;1)$	$(-1;1)$	$(0;1)$	$(1;1)$	$(2;1)$	$(3;1)$
2	$(-2;2)$	$(-1;2)$	$(0;2)$	$(1;2)$	$(2;2)$	$(3;2)$
3	$(-2;3)$	$(-1;3)$	$(0;3)$	$(1;3)$	$(2;3)$	$(3;3)$
4	$(-2;4)$	$(-1;4)$	$(0;4)$	$(1;4)$	$(2;4)$	$(3;4)$

relacionando cada par ordenado $(x;y) \in A \times B$; reemplazando en $y = x + 2$:

$(-2;0)$	$y = x+2$	$0 = -2+2$	$0 = 0$	$(-2;0) \in R$
$(-1;0)$	$y = x+2$	$0 = -1+2$	$0 \neq 1$	$(-1;0) \notin R$
$(0;0)$	$y = x+2$	$0 = 0+2$	$0 \neq 2$	$(2;0) \notin R$
$(1;0)$	$y = x+2$	$0 = 1+2$	$0 \neq 3$	$(1;0) \notin R$
$(2;0)$	$y = x+2$	$0 = 2+2$	$0 \neq 4$	$(2;0) \notin R$
$(3;0)$	$y = x+2$	$0 = 3+2$	$0 \neq 5$	$(3;0) \notin R$
$(-2;1)$	$y = x+2$	$1 = -2+2$	$0 \neq 0$	$(-2;1) \notin R$
$(-1;1)$	$y = x+2$	$1 = -1+2$	$1 = 1$	$(-1;1) \in R$
$(0;1)$	$y = x+2$	$1 = 0+2$	$1 \neq 2$	$(0;1) \notin R$
$(1;1)$	$y = x+2$	$1 = 1+2$	$1 \neq 3$	$(1;1) \notin R$
$(2;1)$	$y = x+2$	$1 = 2+2$	$1 \neq 4$	$(2;1) \notin R$
$(3;1)$	$y = x+2$	$1 = 3+2$	$1 \neq 5$	$(3;1) \notin R$
$(-2;2)$	$y = x+2$	$2 = -2+2$	$2 \neq 0$	$(-2;2) \notin R$
$(-1;2)$	$y = x+2$	$2 = -1+2$	$2 \neq 1$	$(-1;2) \notin R$
$(0;2)$	$y = x+2$	$2 = 0+2$	$2 = 2$	$(0;2) \in R$
$(1;2)$	$y = x+2$	$2 = 1+2$	$2 \neq 3$	$(1;2) \notin R$
$(2;2)$	$y = x+2$	$2 = 2+2$	$2 \neq 4$	$(2;2) \notin R$
$(3;2)$	$y = x+2$	$2 = 3+2$	$2 \neq 5$	$(3;2) \notin R$
$(-2;3)$	$y = x+2$	$3 = -2+2$	$3 \neq 0$	$(-2;3) \notin R$
$(-1;3)$	$y = x+2$	$3 = -1+2$	$3 \neq 1$	$(-1;3) \notin R$
$(0;3)$	$y = x+2$	$3 = 0+2$	$3 \neq 2$	$(0;3) \notin R$
$(1;3)$	$y = x+2$	$3 = 1+2$	$3 = 3$	$(1;3) \in R$
$(2;3)$	$y = x+2$	$3 = 2+2$	$3 \neq 4$	$(2;3) \notin R$
$(3;3)$	$y = x+2$	$3 = 3+2$	$3 \neq 5$	$(3;3) \notin R$
$(-2;4)$	$y = x+2$	$4 = -2+2$	$4 \neq 0$	$(-2;4) \notin R$
$(-1;4)$	$y = x+2$	$4 = -1+2$	$4 \neq 1$	$(-1;4) \notin R$
$(0;4)$	$y = x+2$	$4 = 0+2$	$4 \neq 2$	$(0;4) \notin R$
$(1;4)$	$y = x+2$	$4 = 1+2$	$4 \neq 3$	$(1;4) \notin R$
$(2;4)$	$y = x+2$	$4 = 2+2$	$4 = 4$	$(2;4) \in R$
$(3;4)$	$y = x+2$	$4 = 3+2$	$4 \neq 5$	$(3;4) \notin R$

$a)$ $R = \{(-2;0), (-1;1), (0;2), (1;3), (2;4)\}$

$b)$



$c)$ No es una fución, para el elemento $3 \in A$ no tiene correspodencia en B.

2.2 Dominio y rango de una función.

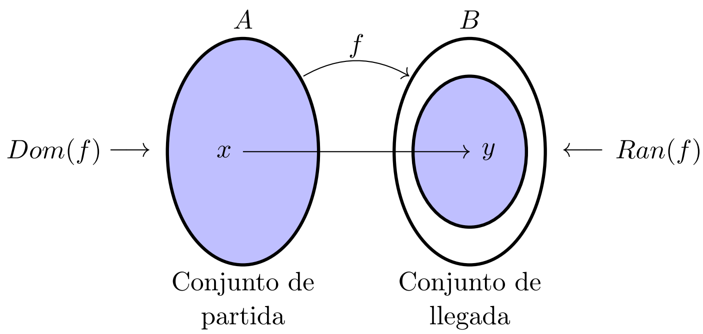
El dominio de una función $f : A \to B$ es el conjunto de todos los primeros elementos componentes $x \in A$ (conjunto de partida) de los pares ordenados de f, esto es:

$$Dom(f) = \{x \in A \,|\, \exists\, y \in B,\ (x;y) \in f\} = A$$

El rango de una función $f : A \to B$ es el conjunto de todas las segundas coponentes $y \in B$ (conjunto de llegada) de los pares ordenados de f, esto es:

$$Ran(f) = \{y \in B \,|\, \exists\ x \in A,\ (x; y) \in f\} \subseteq B$$

Ilustración gráfica.



Ejemplo. Hallar los valores de a y b para que el conjunto de pares ordenados

$$f = \{(4; 3), (-5; -3), (4; a^2 - b^2), (-4; a + b), (a^2 + b; a), (a^2 + b^2; b)\}$$

sea una función y determinar la función. Si es función su dominio y rango.

Solución:

Por condición de unicidad, tenemos:

$$\text{Si } (x; y) \in f \wedge (x; z) \in f \Longrightarrow y = z$$

$$\begin{array}{lclclcl} (4; 3) \in f & \wedge & (4; a^2 - b^2) \in f & \Longrightarrow & 3 = a^2 - b^2 & \Longrightarrow & a^2 - b^2 = 3 \\ (-5; -3) \in f & \wedge & (-5; a + b) \in f & \Longrightarrow & -5 = a + b & \Longrightarrow & a + b = -3 \end{array}$$

obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= 3 \qquad (1) \\ a + b &= -3 \qquad (2) \end{cases}$$

reescribiendo

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= 3 \\ a + b &= -3 \end{cases} \begin{cases} (a + b)(a + b) &= 3 \qquad (I) \\ a + b &= -3 \qquad (II) \end{cases}$$

resolviendo

reemplazamos ecuación (II) en ecuación (I): $(a+b)(a-b) = 3 \implies 3(a-b) = -3 \implies a-b = -1$ ... (III)

de ecuación (III) despejamos b: $a - b = -1 \implies \boxed{b = a + 1}$

reemplazamos $b = a + 1$ en ecuación (II)

$a + b = -3 \implies a + a + 1 = -3 \implies 2a = -3 - 1 \implies 2a = -4 \implies \boxed{a = -2}$

reemplazandp $a = -2$ en ecuación (III)

$b = a + 1 \implies b = -2 + 1 \implies \boxed{b = -1}$

reemplazando $a = -2$ y $b = -1$ en la función f

$(4; a^2 - b^2) = \big(4; (-2)^2 - (-1)^2\big) = (4; 4 - 1) = (4; 3)$

$(-5; a + b) = \big(-5; (-2) + (-1)\big) = (-5; -2 - 1) = (-5; -3)$

$(a^2 + b; a) = \big((-2)^2 + (-1); -2\big) = (4 - 1; -2) = (3; -2)$

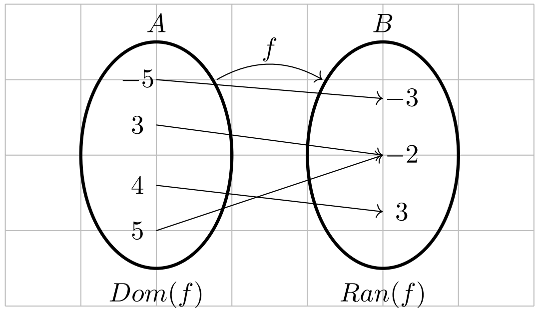
$(a^2 + b^2; b) = \big((-4)^2 + (-1)^2; -1\big) = (4 + 1; -1) = (5; -1)$

$$f = \{(4; 3), (-5; -3), (4; 3), (-5; -3), (3; -2), (5; -2)\}$$

f es una función por que cada elemento de A tiene imagen única en B.

$$f = \{(4; 3), (-5; -3), (3; -2), (5; -2)\}$$

$$Dom(f) = \{-5, 3, 4, 5\} \implies Ran(f) = \{-3, -2, 3\}$$



Ejemplo. Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Se define en A las funciones $g(x) = mx^2 + bx + c$ y $f = \{(1; 1), (2; 3), (4; 2), (3; 3), (4; m)\}$. Si $g(1) = g(1)$ y $g(2) = 4$. Hallar el $Ran(g)$.

Solucion:

Por condición de unicidad, tenemos:

$$\text{Si } (x; y) \in f \wedge (x; z) \in f \Longrightarrow y = z$$

$(4; 2) \in f \ \wedge \ (4; m) \in f \ \Longrightarrow \ 2 = m \ \Longrightarrow \ m = 2$

reemplazando $m = 2$ en la función $g(x)$:

$g(x) = mx^2 + bx + c \ \Longrightarrow \ \boxed{g(x) = 2x^2 + bx + c}$ ... (I)

$g(2) = 4 \ \Longrightarrow \ 2(2)^2 + b(2) + c = 4 \ \Longrightarrow \ 8 + 2b + c = 4 \ \Longrightarrow \ 2b + c = 4 - 8 \ \Longrightarrow \ \boxed{2b + c = -4}$

$f = \big\{\big(1; f(1)\big), \big(2; f(2)\big), \big(3; f(3)\big), \big(4; f(4)\big)\big\}$

$f(1) = 1 \quad f(2) = 2 \quad f(3) = 3 \quad f(4) = 4$

$f(1) = g(1) \ \Longrightarrow \ g(1) = f(1) \ \Longrightarrow \ g(1) = 1$

$g(1) = 1 \ \Longrightarrow \ 2(1)^2 + b(1) + c = 1 \ \Longrightarrow \ 2 + b + c = 1 \ \Longrightarrow \ b + c = 1 - 2 \ \Longrightarrow \ \boxed{b + c = -1}$

obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcrl} 2b + c & = & -4 & \quad (1) \\ b + c & = & -1 & \quad (2) \end{array}\right.$$

resolviendo

multiplicando la ecuación (2) por -1, y sumarla a la ecuación (1)

$$\begin{array}{rcr} 2b + c & = & -4 \\ \underline{b + c} & = & \underline{-1} \\ . & & \end{array} \quad \times(-1) \ \Longrightarrow \ \begin{array}{rcr} 2b + c & = & -4 \\ \underline{-\ \ b - c} & = & \underline{\ \ 1} \\ b & = & -3 \end{array} \ \Longrightarrow \ \boxed{b = -3}$$

multiplicando la ecuación (2)por -2, y sumarla a la ecuación (1)

$$\begin{array}{rcr} 2b + c & = & -4 \\ \underline{b + c} & = & \underline{-1} \\ . & & \end{array} \quad \times(-2) \ \Longrightarrow \ \begin{array}{rcr} 2b + \ \ c & = & -4 \\ \underline{-2b - 2c} & = & \underline{\ \ 2} \\ -c & = & -2 \end{array} \ \Longrightarrow \ \boxed{c = 2}$$

reemplazamos $b = -3$ Y $c = 2$ en (I)

$g(x) = 2x^2 + bx + c \ \Longrightarrow \ g(x) = 2x^2 + (-3)x + (2) \ \Longrightarrow \ \boxed{g(x) = 2x^2 - 3x + 2}$

evaluando los valores del conjunto A en la función $g(x) = 2x^2 - 3x + 2$

$q(1) = 2(2)^2 - 3(1) + 2 \ \Rightarrow \ g(1) = 2 - 3 + 2 \ \Rightarrow \ g(1) = 4 - 3 \ \Rightarrow \ g(1) = 1 \ \Rightarrow$ la imagen de 1 es 1

$q(2) = 2(2)^2 - 3(2) + 2 \ \Rightarrow \ g(2) = 8 - 6 + 2 \ \Rightarrow \ g(1) = 10 - 6 \ \Rightarrow \ g(2) = 4 \ \Rightarrow$ la imagen de 2 es 4

$q(3) = 2(3)^2 - 3(3) + 2 \ \Rightarrow \ g(3) = 18 - 9 + 2 \ \Rightarrow \ g(1) = 20 - 9 \ \Rightarrow \ g(3) = 11 \ \Rightarrow$ la imagen de 3 es 11

$q(4) = 2(4)^2 - 3(4) + 2 \ \Rightarrow \ g(4) = 32 - 12 + 2 \ \Rightarrow \ g(1) = 34 - 12 \ \Rightarrow \ g(4) = 24 \ \Rightarrow$ la imagen de 4 es 24

$$\boxed{Ran(g) = \{1, 4, 11, 24\}}$$

Regla de dorrespondencia. Con frecuencia una función se define nediante una regla o ecuación que permite calcular para cualquier $x \in Dom(f)$ su correspodiente imagen $y = f(x)$.

Ejemplo. Hallar $f(x)$, si:

$a)$ $f(x + 1) = x^2 - 3x + 2$

Solución:

Hallaremos $f(x)$ restando -1 a todas las x para eliminar el sumando 1 de $x+1$

$$\begin{aligned} f(x+1-1)=(x-1)^2-3(x-1)+2 &\implies f(x)=x^2-2x+1-3x+3+2\\ &\implies f(x)=x^2-2x-3x+1+3+2\\ &\implies f(x)=x^2-5x+6 \end{aligned}$$

b) $f(3x-2)=9x^2+6x-8$

Solución:

Dividiremos entre 3 todos los x de la función, para sinplificar el factor 3 de $3x-2$

$$\begin{aligned} f\left(3\left(\frac{x}{3}\right)-2\right)=9\left(\frac{x}{3}\right)^2+6\left(\frac{x}{3}\right)-8 &\implies f\left(\frac{3x}{3}-2\right)=\frac{9x^2}{9}+\frac{6x}{3}-8\\ &\implies f(x-2)=x^2+2x-8 \end{aligned}$$

sumaremos 2 a todas las x para eliminar el factor 2 de $x-2$:

$$\begin{aligned} f(x+2-2)=(x+2)^2+2(x+2)-8 &\implies f(x)=x^2+4x+4+2x+4-8\\ &\implies f(x)=x^2+4x+2x+4+4-8\\ &\implies f(x)=x^2+6x \end{aligned}$$

Evaluación de una función. Consideremos una f con su regla de correspondencia

$$y=f(x),\ \ x\in Dom(f)$$

si toma x valores especificos, por ejemplo $x=x_0$, entonces $y_0=f(x_0)$ se dice que la función a sido evaluada, es decir dado f significa obtener el valor de y mediante su regla de correspondencia, luego de asignar valores a x.

Ejemplo. Calcular $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ y $f(4)$, si $f(x)=x^4-6x^3+11x^2-6x$.

Solución:

$f(x)=x^4-6x^3+11x^2-6x=x(x^3-6x+11x-6)$

factorizamos el polinomio $x^3-6x+11x-6$ por la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -6 & 11 & -6\\ 1 & & 1 & -5 & 6\\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0\\ 2 & & 2 & -6 & \\ \hline & 1 & -3 & 0 & \end{array}$$

$$f(x)=x^4-6x^3+11x^2-6x=x(x-1)(x-2)(x-3)$$

evaluando la función para los valores de x dados, describiremos la función como:

$$f(\quad)=\quad(\quad-1)(\quad-2)(\quad-3),$$

entonces

$f(0)=0(0-1)(0-2)(0-3)=0(-1)(-2)(-3)=0(-6)=0 \implies f(0)=0 \implies$ la imagen de 0 es 0.

$f(1)=1(1-1)(1-2)(1-3)=1(0)(-1)(-2)=(0)(-6)=0 \implies f(1)=0 \implies$ la imagen de 1 es 0.

$f(2)=2(2-1)(2-2)(2-3)=2(1)(0)(-1)=(0)(-2)=0 \implies f(2)=0 \implies$ la imagen de 2 es 0.

$f(3)=3(3-1)(3-2)(3-3)=3(2)(1)(0)=(6)(0)=0 \implies f(4)=0 \implies$ la imagen de 3 es 0.

$f(4)=4(4-1)(4-2)(4-3)=4(1)(2)(3)=4(6)=24 \implies f(4)=24 \implies$ la imagen de 4 es 24.

Ejemplo. Hallar la regla de correspondencia de la función $f(x)=ax^2+bx+c$ que tienen a $\mathbb{R}$ como su dominio y tal que $f(-1)=3$, $f(2)=0$ y $f(4)=28$

Solución.

evaluando la función cuadratica, par los valores de x dados:

$f(-1)=3 \implies a(-1)^2+b(-1)+c=3 \implies a-b+c=3$ ... (1)

$f(2)=0 \implies a(2)^2+b(2)+c=0 \implies 4a+2b+c=0$ ... (2)

$f(4)=28 \implies a(4)^2+b(4)+c=28 \implies 16a+4b+c=28$ ... (3)

obtenemos el siguiente sistema de ecuacionea:

$$\begin{cases} a-b+c &= 3 \quad (1)\\ 4a+2b+c &= 0 \quad (2)\\ 16a+4b+c &= 28 \quad (3)\end{cases}$$

resolviendo

$$\begin{array}{rcll} a-b+c &=& 3 & \times(2) \\ \underline{4a+2b+c} &=& \underline{0} & \\ . & & & \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} 2a-2b+2c &=& 6 \\ \underline{4a+2b+\ c} &=& \underline{0} \\ 6a \qquad +3c &=& 6 \end{array} \Longrightarrow 2a+c=2$$

$$\begin{array}{rcll} a-b+c &=& 3 & \times(4) \\ \underline{4a+2b+c} &=& \underline{0} & \\ . & & & \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} 4a-4b+4c &=& 12 \\ \underline{16a+4b+\ c} &=& \underline{28} \\ 20a \qquad +5c &=& 40 \end{array} \Longrightarrow 4a+c=8$$

$$\begin{cases} 2a+c &= 2 \quad (4)\\ 4a+c &= 8 \quad (5)\end{cases}$$

$$\begin{array}{rcll} 2a+c &=& 2 & \\ \underline{4a+c} &=& \underline{8} & \times(1-) \\ . & & & \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} 2a+c &=& 2 \\ \underline{-4a-c} &=& \underline{-8} \\ -2a &=& -6 \end{array} \Longrightarrow 2a=6 \Longrightarrow \boxed{a=3}$$

reemplazando $x=3$ en ecuación (4).

$2a+c=2 \Longrightarrow 2(3)+c=2 \Longrightarrow 6+c=2 \Longrightarrow c=2-6 \Longrightarrow \boxed{c=-4}$

reemplazando $a=3$ y $c=-4$ en ecuación (1)

$a-b+c=3 \Longrightarrow 3-b+(-4)=3 \Longrightarrow 3-b-4=3 \Longrightarrow -b-1=3 \Longrightarrow b=-1-3 \Longrightarrow \boxed{b=-4}$

reemplazando $a=3$, $b=4$ y $c=-4$ en la ecuación $f(x)=ax^2+bx+c$, obtenemos su regla de correspondencia:

$f(x)=(3)x^2+(-4)x+(-4) \Longrightarrow \boxed{f(x)=3x^2-4x-4}$

Ejemplo. Sea la función $f(x)=ax^2+bx+c$ tal que $f(-1)=0$, $f(1)=8$ y $f(-1)+f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{4}$, hallar $f(2)$.

Solución:

$f(-1)=0 \Longrightarrow a(-1)^2+b(-1)+c=0 \Longrightarrow \boxed{a-b+c=0}$

$f(1)=8, \Longrightarrow a(1)^2+b(1)+c, \Longrightarrow \boxed{a+b+c=8}$

$f(-1)+f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{4} \Longrightarrow a(-1)^2+b(-1)+c+a\left(\frac{1}{2}\right)^2+b\left(\frac{1}{2}\right)+c=\frac{15}{4} \Longrightarrow a-b+c+\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c=\frac{15}{4}$

$a+\frac{a}{4}+\frac{b}{2}-b+c+c=\frac{15}{4} \Longrightarrow \frac{4a+a}{4}+\frac{b-2b}{2}+2c=\frac{15}{4} \Longrightarrow \frac{5a}{4}-\frac{b}{2}+2c=\frac{15}{4} \Longrightarrow \boxed{5a-2b+8=15}$

$$\begin{cases} a-b+c &= 0 \quad (1)\\ a+b+c &= 8 \quad (2)\\ 5a-2b+c &= 15 \quad (3)\end{cases}$$

Sumando ecuaciones (1) y (2):

$$\begin{array}{rcl} a-b+\ c &=& 0 \\ \underline{a+b+\ c} &=& \underline{8} \\ 2a \qquad +2c &=& 8 \end{array} \Longrightarrow a+c=4$$

Sumando ecuaciones (1) y (2):

$$\begin{array}{rcll} a+\ b+\ c &=& 8 & \times(2) \\ \underline{5a-2b+8c} &=& \underline{15} & \\ . & & & \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} 2a+2b+\ 2c &=& 16 \\ \underline{5a-2b+\ 8c} &=& \underline{15} \\ 7a \qquad +10c &=& 31 \end{array}$$

$$\begin{cases} a+\ \ c &= 4 \quad (4)\\ 7a+10c &= 31 \quad (5)\end{cases}$$

$$\begin{array}{rcll} a+\ \ c &=& 4 & \times(-10) \\ \underline{7a+10c} &=& \underline{31} & \\ . & & & \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} -10a-10c &=& -40 \\ \underline{7a+10c} &=& \underline{\ \ 31} \\ -3a &=& -\ 9 \end{array} \Longrightarrow \boxed{a=3}$$

$$\begin{array}{rcl} a+\quad c &=& 4 \\ \underline{7a+10c} &=& \underline{31} \\ . & & \end{array} \quad \times(-7) \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} -7a-\ 7c &=& -28 \\ \underline{7a+10c} &=& \underline{\ \ 31} \\ 3c &=& 3 \end{array} \Longrightarrow \boxed{c=1}$$

reemplazado $a=3$ y $c=1$ en ecuación (2)

$a+b+c=8 \implies 3+b+1=8 \implies 4+b=8 \implies b=8-4 \implies \boxed{b=4}$

reemplazando $a=3$, $b=4$ y $c=1$ en la fución cuadratica

$f(x)=ax^2+bx+c \implies f(x)=3x^2+4x+1$

evaluamos la funcion cuadratica resultante, para $f(2)$, tenemos:

$f(2)=3(2)^2+4(2)+1, \implies f(2)=12+8+1, \implies \boxed{f(2)=21}$

Determinación del dominio de una función. Cuando una función viene dada por una formula o regla de correspodencia, se suele sobreentender que el domino consiste de todos los números para los que la regla de corespondencia esta bien definida. ahora bien, el dominio de una función puede describirse explicitamete junto con la función o estar implicito en la formula que define a la función.

a) Las funciones polinomicas: $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0$, $a_n\neq 0$, tiene por dominio implicito al conjunto $\mathbb{R}$.

b) La funciones racionales de la forma $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, tiene como dominio implicito a $\mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R}|q(x)\neq 0\}$.

c) Las funciones con raíces índice par $f(x)=\sqrt[2n]{g(x)}$, $n\in\mathbb{Z}^+$, tiene como dominio implicito al conjunto $\{x\in\mathbb{R}|g(x)\geq 0\}$

d) La funcion logaritmo $f(x)=ln\big(g(x)\big)$, tiene como dominio implicito al conjunto $\{x\in\mathbb{R}|g(x)>0\}$

Hallar el dominio y rango de la siguientes funciones:

a) $g(x)=\dfrac{4x^2-1}{2x+1}$

Solución:

La función g esta bien definido en $\mathbb{R}$ si $2x+1\neq 0 \implies 2x\neq -1 \implies x\neq -\dfrac{1}{2}$, es decir que x puede tomar cualquier número real, menos el número $-\dfrac{1}{2}$, por lo tanto:

$$Dom(g)=\left\{x\in\mathbb{R}|(-\infty\leq x\leq\infty)-\left\{-\frac{1}{2}\right\}\right\}$$

Para hallar el rango es necesario despejar x de la función $y=\dfrac{4x^2-1}{2x+1}$

$y(2x+1)=4x^2-1 \implies 2xy+y=4x^2-1 \implies 4x^2-2xy-y-1=0 \implies 4x^2-2y\,x-(y+1)=0$

$x=\dfrac{-(-2y)\pm\sqrt{(-2y)^2-4(4)[-(y+1)]}}{2(4)} \implies x=\dfrac{2y\pm\sqrt{4y^2-16(y+1)}}{8}$

$x=\dfrac{2y\pm\sqrt{4[y^2+4(y+1)]}}{8} \implies x=\dfrac{2y\pm 2\sqrt{y^2+4y+4}}{8} \implies x=\dfrac{2\big(y\pm\sqrt{(x+2)^2}\,\big)}{8}$

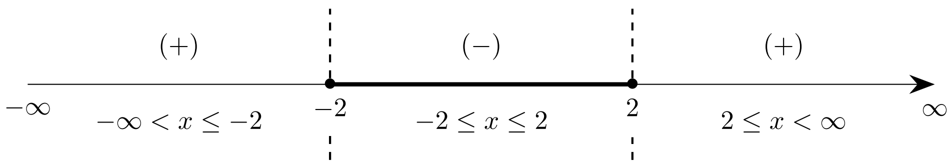
$x=\dfrac{y\pm|y+2|}{4}$, en esta ultima función vemos que no hay ninguna restricción, excepto el 2, pues con este dato pierde sentido la función: $Ran(g)=\big\{y\in\mathbb{R}|(-\infty\leq y\leq\infty)-\{2\}\big\}$

a) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

Solución:

Claramente, $f(x)$ se define para todos los valores reales de x para los cuales $(4-x^2)\geq 0$

$4-x^2\geq 0 \implies -x^2+4\geq 0 \implies -(x^2-4)\geq 0 \implies x^2-4\leq 0 \implies (x-2)(x+2)\leq 0$



$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x \leq 2\}$$

$$\begin{array}{lcc}
\text{partiendo de el dominio de la función:} & \Longrightarrow & -2 \leq x \leq 2 \\
 & \Longrightarrow & (-2 \leq x < 0) \vee (0 \leq x \leq 2) \\
 & \Longrightarrow & 0 \leq x \leq 2 \\
\text{elevando al cuadrado} & \Longrightarrow & 0^2 \leq x^2 \leq 2^2 \\
 & \Longrightarrow & 0 \leq x^2 \leq 4 \\
\text{multiplicando por } -1 & \Longrightarrow & -4 \leq -x^2 \leq 0 \\
\text{sumando 4} & \Longrightarrow & 4-4 \leq 4-x^2 \leq 4+0 \\
 & \Longrightarrow & 0 \leq 4-x^2 \leq 4 \\
\text{introduciendo a raiz cuadrada} & \Longrightarrow & \sqrt{0} \leq \sqrt{4-x^2} \leq \sqrt{4} \\
\text{finalmente} & \Longrightarrow & 0 \leq f(x) \leq 2
\end{array}$$

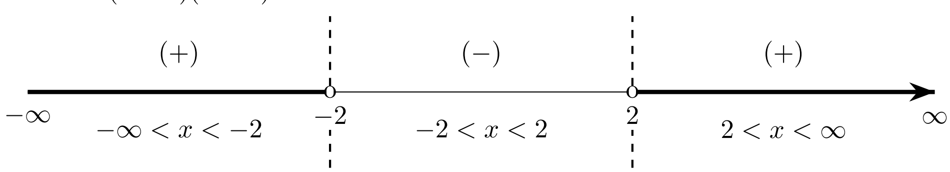
$$Ran(f) = \{y \in \mathbb{R} | 0 \leq y \leq 2\}$$

c) $f(x) = log(x^2 - 4)$

Solución:

Claramente, $f(x)$ se define para todos los valores reales de x para los cuales $(x^2 - 4) > 0$

$x^2 - 4 > 0 \implies (x-2)(x+2) > 0$



$$Dom(g) = \{x \in \mathbb{R} | (-\infty < x < -2) \cup (2 < x < \infty)\}$$